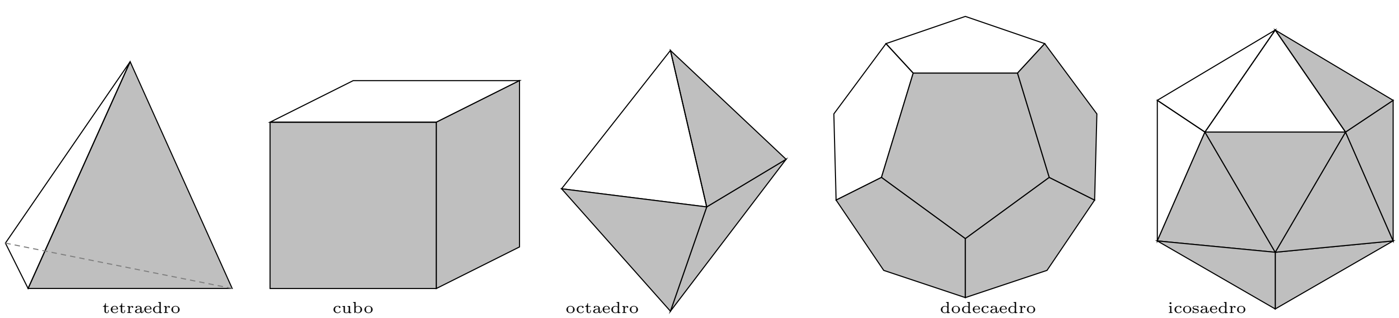
*MATEMÁTICAS*

*MATEMÁTICAS*

*MATEMÁTICAS*

*MATEMÁTICAS*

# CIENCIAS NATURALEZA I




10 de septiembre de 2005

Germán Ibáñez

# Índice General

# 1 EL NUMERO REAL

## 1.1 Ampliaciones sucesivas de los números

El motivo por el que se va ampliando el conjunto de números es que hay operaciones que no se pueden hacer siempre:

a) en los números naturales, $N$, la resta ejemplo: $4 - 7 = ?$

b) en los números enteros, $Z$, la división ejemplo: $5 : 3 = ?$

c) en los números racionales, $Q$, veremos que no se puede hacer siempre la raíz cuadrada ejemplo: $\sqrt{2}$

Los números racionales se pueden expresar en forma fraccionaria y en forma decimal. Se pasa de forma fraccionaria a forma decimal haciendo la división y como al hacer la división los restos han de ser más pequeños que el divisor necesariamente llega un momento en que se repite:

$$\begin{array}{lllllllll|l}
3 & 9 & & & & & & & & 7 \\ \cline{10-10}
 & 4 & 0 & & & & & & & 5'5714285\ldots \\
 & & 5 & 0 & & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & & & & & \\
 & & & & 3 & 0 & & & & \\
 & & & & & 2 & 0 & & & \\
 & & & & & & 6 & 0 & & \\
 & & & & & & & 4 & 0 & \\
 & & & & & & & & 5 &
\end{array}$$

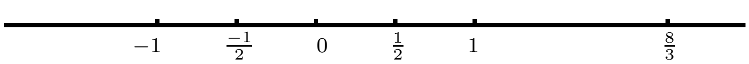
$$\frac{2}{5} = 0'4000\ldots \qquad \frac{41}{33} = 1'24242424\ldots \qquad \frac{-242}{45} = -5'377777\ldots$$

Por tanto la expresión decimal de un número racional siempre es periódica.

Luego un número racional se puede expresar:
a) De infinitas maneras en forma fraccionaria: $\dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{-4}{-6}$

b) De una única manera como expresión decimal periódica;
(hay una excepción $3'5999999\ldots = 3'6000000\ldots$ )

Los números racionales se representan en la recta.



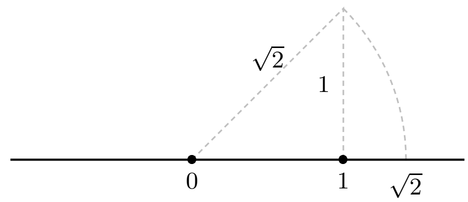

## 1.2 Números irracionales

La radicación no siempre es posible en $Q$: $\sqrt{2} = 1'4142\ldots$ en la raíz las cifras no se pueden repetir ya que cada vez se pone el doble de lo que se va poniendo en la raíz:

Vemos que $\sqrt{2}$ tiene expresión decimal no periódica por lo tanto no es racional.

hipotenusa $= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Vemos que $\sqrt{2}$ se puede representar en la recta, por tanto en la recta hay más puntos que números racionales.




**Los números irracionales son los que tienen expresión decimal no periódica.** Ejemplos: $12'3456789101112\ldots, \quad 1'01001000100001\ldots$

Un número irracional no se puede escribir exactamente en forma decimal, aunque se pueden hallar tantas cifras decimales como se deseen.

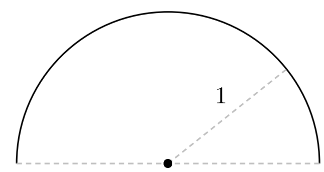
Números irracionales famosos son:

El número $\mathbf{e} = 2'71828\ldots$

Es el número al que se acerca la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando $n$ es un número natural muy grande por ejemplo: $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2'7048, \qquad \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2'7169$

El número $\pi = 3'1415\ldots$

Es la longitud de media circunferencia de radio uno.




## 1.3 Los números reales

Los números racionales junto con los irracionales forman el conjunto de los números reales, se representan por $R$.

Se consideran las operaciones suma (+) y producto (.), que cumplen las siguientes propiedades:

**Asociativa:** $a + (b + c) = (a + b) + c; \quad a.(b.c) = (a.b).c$

es decir: para sumar (o multiplicar) varios números da igual el orden en que se hacen las sumas (los productos). En el caso del producto también se dice: para multiplicar un producto por un número basta multiplicar uno solo de los factores.

**Conmutativa:** a + b = b + a ; a . b = b . a

es decir: el orden de los sumandos (factores) no altera la suma (el producto).

**Elemento neutro:** el 0 para la suma y el 1 para el producto

**Elemento simétrico** del número a es: el opuesto $-a$ para la suma y el inverso $\frac{1}{a}$ si $a \neq 0$ para el producto.

**Distributiva del producto respecto de la suma:** $a.(b+c) = a.b + a.c$
es decir: para multiplicar una suma por un número se multiplica cada uno de los sumandos.
Leyendo al revés es la operación de sacar factor común.

nota: como decíamos antes para multiplicar (o dividir) un producto por un número se multiplica o se divide uno solo de los factores $\dfrac{3\sqrt{10}}{3} = \sqrt{10}$

El conjunto $R$ de los números reales con la suma, el producto y las propiedades que verifican se dice que tiene estructura de cuerpo conmutativo, esto escribe $(R, +, .)$ cuerpo conmutativo.

Además dados dos números reales siempre podemos decir cuál de los dos es más pequeño, es decir los números reales están ordenados por el orden $\leq \ldots$ menor o igual que ...

## 1.4 Aproximación por exceso y por defecto de un número real

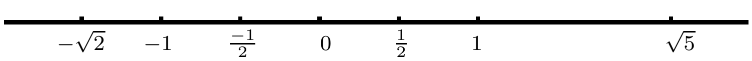
Los números que tienen expresión decimal periódica $5'3333\ldots, 17'28979797\ldots$ y los números irracionales, como no se pueden dar todas sus cifra decimales se dan por aproximación:

$$\sqrt{2} \approx \begin{cases} 1, 1'4, 1'41, 1'414, 1'4142, \ldots & \text{por defecto} \\ 2, 1'5, 1'42, 1'415, 1'4143, \ldots & \text{por exceso} \end{cases}$$

$$\frac{41}{33} = 1'2424\ldots \approx \begin{cases} 1, 1'2, 1'24, 1'242, 1'2424, \ldots & \text{por defecto} \\ 2, 1'3, 1'25, 1'243, 1'2425, \ldots & \text{por exceso} \end{cases}$$

## 1.5 Representación gráfica de los números reales en la recta

A cada número real le corresponde un punto y a cada punto un número real.
Los números reales llenan la recta:




## 1.6 Intervalos de números reales

Son trozos de la recta real. Por ejemplo: $\{x \in R / -1'4 \leq x \leq 3\}$, es el conjunto de números reales $x$, tales que $-1'4$ es menor o igual que $x$ y $x$ es menor o igual que 3, es decir el conjunto de números reales comprendidos entre $-1'4$ y 3, incluyendo $-1'4$ y 3.

**intervalo abierto de extremos** $a, b$ es: $(a, b) = \{x \in R / a < x < b\}$

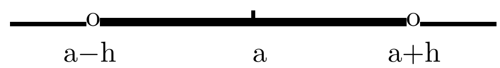

**intervalo cerrado de extremos** $a, b$ es: $[a, b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$


intervalo cerrado por $a$ y abierto por $b$ es $[a, b)$ es: $[a, b) = \{x \in R / a \leq x < b\}$

números más pequeños o iguales que $a$ es: $(-\infty, a]$


números mayores que $a$ es: $(a, \infty)$


**Entorno simétrico** de $a$ de radio $h$ es el intervalo abierto $(a-h, a+h)$, cualquier $x$ del entorno se caracteriza porque la distancia de $x$ a $a$ es menor que $h$, es decir:
$(a-h, a+h) = \{x \in R/a-h < x < a+h\} = \{x \in R/|x-a| < h\}$




**Ejemplo** Expresar el conjunto de puntos de $R$ que distan de -0'1 menos de 2.

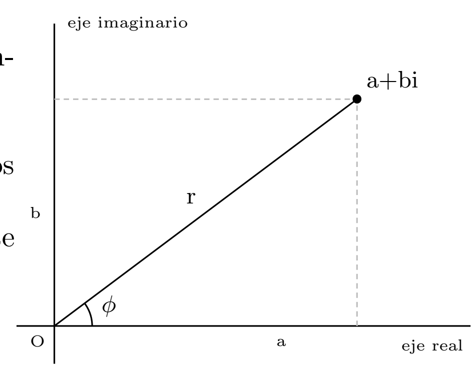
### 1.7 Unidad imaginaria. Números complejos

Sabemos que los números reales negativos no tienen raíz cuadrada real; para que todos los números tengan raíz, inventamos los números imaginarios.

La unidad imaginaria es: $i = \sqrt{-1}$, y entonces ya podemos escribir cualquier raíz.

**Ejemplos** $\sqrt{-7} = \sqrt{7.(-1)} = \sqrt{7}.\sqrt{-1} = \sqrt{7}.i$
$\sqrt{-9} = 3i$
$\sqrt{-\pi} = \sqrt{\pi}.i$
Resolver la ecuación $x^2 - 4x + 8 = 0$
$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i; \begin{cases} x_1 = 2+2i \\ x_2 = 2-2i \end{cases}$
Estos son ejemplos de números complejos. Otros ejemplos serían $3+5i$; $-2+\sqrt{7}i$ ; etc.

En general un número complejo es de la forma "a+bi" donde a y b son números reales.




Los números reales se pueden considerar incluidos en los números complejos, por ejemplo:
$4 = 4 + 0i$
Los números complejos de la forma $5i = 0 + 5i$, se llaman imaginarios puros.
En un número complejo a+bi, a se llama parte real, b se llama parte imaginaria (lo que acompaña a la i).
Los números complejos se representan en dos ejes en el plano:
Ejemplos: z = 4+3i ;
z'= $-2i$.

El punto A que lo representa se llama afijo del número complejo z .

**Suma de números complejos**

Se suman las partes reales y las imaginarias.

Ejemplo: $(3-2i)+(1+3i)=4+i$

**Potencias de la unidad imaginaria**
Sabemos que $i=\sqrt{-1}$, por lo tanto $i^2=-1$ y entonces:
$i^3=i.i^2=(-1)i=-i$
$i^4=i^2.i^2=(-1)(-1)=1$
$i^5=i.i^4=i.1=i$
$i^{13}=i^{4.3+1}=i^{4.3}.i=i$
$i^m=i^{4.n+r}=i^{4.n}.i^r=i^r$ o sea $i^m=i^r$ siendo r el resto de dividir m por 4

**Producto de números complejos**
Ejemplo:
$(3-2i).(1+3i)=3+9i-2i-6i^2=3+7i-6.(-1)=3+7i+6=9+7i$
Por tanto la multiplicación es parecida a la de polinomios.

**Por la representación gráfica de los números complejos vemos que no están ordenados, no se sabe cuando uno es menor que otro, eso hace que en la práctica se utilicen poco**

## 1.8 Números factoriales

5.4.3 = factorial de 5 de orden 3.
1998.1997.1996.1995.1994.1993.1992.1991.1990.1989.1988 $=1998^{(11}$ es el factorial de 1998 de orden 11.
$x(x-1)(x-2)=x^{(3}$. Factorial de $x$ de orden 3.
Dado un número natural por ejemplo el 5, podemos considerar los productos 5.4; 5.4.3; etc.

Es decir productos en los que los factores se van obteniendo restando una unidad a los anteriores.

El número de factores se llama orden. Así en 4.3 es factorial de 4 de orden 2, se escribe $4^{(2}$.
Cuando llega hasta el 1 se escribe sólo con una admiración, ejemplo: $4.3.2.1=4!$ y se llama simplemente número factorial, en el ejemplo factorial de 4.

En general sean $m$ y $h$ dos números naturales con $m\geq h$, factorial de $m$ de orden $h$ es el producto de $h$ factores decrecientes a partir de $m$ :

$$m^{(h}=m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-h+1)$$

Efectivamente hay $h$ factores pues contando lo que se resta:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $m$ | $(m-1)$ | $(m-2)$ | $(m-3)$ | $\dots$ | $(m-h+1)$ | |
| se resta: | 0 | 1 | 2 | 3 | | $(h-1)$ | pues $[m-(h-1)]=(m-h+1)$ |
| orden: | $1^0$ | $2^0$ | $3^0$ | $4^0$ | | $h^0$ | |

Ejemplo: $x^{(5}=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Por convenio se define que factorial de cualquier número de orden 0 es 1 $m^{(0}=1$;
y de orden 1 : $m^{(1}=m$.

Factorial de $m$ será $m!=m(m-1)(m-2)(m-3)\dots 3.2.1$

**Propiedades**

1. $m^{(m} = m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-m+1) = m(m-1)(m-2)(m-3)\dots 2.1$

2. $m^{(h} = \dfrac{m!}{(m-h)!}$

   demostración:
   $\dfrac{m!}{(m-h)!} = \dfrac{m(m-1)(m-2)\dots(m-h+1)(m-h)(m-h-1)\dots 3.2.1}{(m-h)(m-h-1)\dots 3.2.1} =$
   $m(m-1)(m-2)\dots(m-h+1)$

## 1.9 Números combinatorios

Sean $m$ y $h$ dos números naturales con $m \geq h$. Se define número combinatorio de base $m$ de orden $h$ como:

$$\binom{m}{h} = \frac{m^{(h}}{h!}$$

Ejemplos:
$\binom{7}{3} = \dfrac{7^{(3}}{3!} = \dfrac{7.6.5}{3.2.1} = 35$
$\binom{x}{4} = \dfrac{x^{(4}}{4!} = \dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4.3.2.1}$
$\binom{x+3}{2} = \dfrac{(x+3)^{(2}}{2!} = \dfrac{(x+3)(x+2)}{2.1}$
$\binom{x+3}{x+2} = \dfrac{(x+3)^{(x+2}}{(x+2)!} = \dfrac{(x+3)(x+2)\dots[(x+3)-(x+2)+1]}{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)\dots 3.2.1} =$
$\dfrac{(x+3)(x+2)\dots 2}{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)\dots 3.2.1} = x+3$

**Propiedades:**

1. $\binom{m}{h} = \dfrac{m!}{h!.(m-h)!}$

   Ejemplo: $\binom{7}{3} = \dfrac{7^{(3}}{3!} = \dfrac{7.6.5}{3.2.1} \quad \dfrac{7!}{4!.3!} = \dfrac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.\ 3.2.1} = \dfrac{7.6.5}{3.2.1}$

   Demostración: $\binom{m}{h} = \dfrac{m^{(h}}{h!} = \dfrac{\frac{m!}{(m-h)!}}{h!}$

2. $\binom{m}{0} = 1 \quad \binom{m}{m} = 1$

   Demostración: $\binom{m}{0} = \dfrac{m^{(0}}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1; \quad \binom{m}{m} = \dfrac{m!}{(m-m)!.m!} = \dfrac{m!}{0!.m!} = 1$

3. Triángulo de Tartaglia

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

que da los resultados:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Observamos que:

(a) la suma de dos números combinatorios seguidos nos da el de abajo:
$$\binom{m}{h} + \binom{m}{h+1} = \binom{m+1}{h+1}$$

(b) los números equidistantes de los extremos son iguales:
$$\binom{m}{h} = \binom{m}{m-h}$$

(c) la suma de los elementos de la linea de base $m$ es $2^m$

## Problemas de Número Real

1. Efectuar por mínimo común denominador simplificando el resultado:

   a) $\frac{4}{3} - \frac{2}{25} + \frac{7}{5} =$

   b) $1 + \frac{1}{10} - \frac{10}{100} + \frac{1}{10000} =$

   c) $\frac{5}{4} - \frac{3}{10} + \frac{9}{6} - \frac{10}{25} + 4 =$

   d) $1 - \dfrac{\frac{1}{5} + \frac{3}{4}}{\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{5} - 2} =$

   Solución: a) 43/25, b) 11099/10000, c) 121/20, d) 54/35

2. Extaer factor común

   a) $8a + 5ab - 3ac - 2da$

   b) $3a + 9ab - 6ad + 12ca$

   c) $14\sqrt{2} - 21\sqrt{3} + 28\sqrt{5} + 49\sqrt{7}$

   d) $x^3y^3 + 2x^2y^4 - 5x^3y^2$

   e) $15x^2 - 3x + 6x^3 - 12x^7$

   Solución: a) $a(8+5b-3c-2d)$ , b) $3a(1+3b+2d+4c)$ , c) $7(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+4\sqrt{5}+7\sqrt{7})$, d) $x^2y^2(xy+2y^2-5x)$, e) $3x(5x-1+2x^2-4x^6)$

3. Efectuar $1 + \dfrac{1}{3 + \frac{1}{2+\frac{1}{3}}} =$

   Solución: 31/24

4. Efectuar $\dfrac{\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}\left(1 + \frac{2}{5}\right)} =$

   Solución: 44/63

5. Sacar factor común $x(x-y) - (x-y)^2$

   Solución: $(x-y)y$

6. Representar en una recta

   $-8/3$; $-4'7$; $-0'9$; $\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$

7. Representar y dar tres elementos del conjunto $\{x \in R / -1'4 \leq x \leq 3\}$

8. Hallar dos clases contiguas de números irracionales que aproximan: a) $-3+2\sqrt{2}$ ; b) $-\sqrt{3}$. Representar gráficamente hasta las décimas.

   Solución: $\left.\begin{array}{l} 0, 0'1, 0'17, 0'171, 0'1716 \\ 1, 0'2, 0'18, 0'172, 0'7117 \end{array}\right\} -3+2\sqrt{2}$

9. Escribir y dibujar los intervalos $(3,6)$; $[-1'3, \sqrt{2}]$. Decir de qué número es entorno el intervalo $[3,7]$.

10. Decir qué propiedad se aplica en cada caso:

    a) $(-5).9 = 9.(-5)$

    b) $3(2-6x) = 6-18x$

    c) $[3.(-5)].[14.(-4)] = 3.(70).(-4)$

    d) $\dfrac{10+x}{4} = \dfrac{5+x}{2}$

    e) $\dfrac{4+6}{4} = \dfrac{2+3}{2}$

    Solución: a) conmutativa, b) distributiva, c) asociativa, d) es incorrecto, e) distributiva

11. Dibujar 5 números en el intervalo de centro $-1'9$ y radio $0'2$.

12. Dibujar 5 números en el intervalo de centro $0'1$ y radio $0'25$.

13. Efectuar $(3+2i).(5-4i)$

    Solución: $23-2i$

14. Dados los números complejos $z = 3-i$, $u = 2+i$, $v = 3i$. Efectuar $z^2 + u.v$

    Solución: $8i$

15. Efectuar $(2-3i)(5i-1)$

    Solución: $13+13i$

16. Representar los afijos a) $\sqrt{3}+3i$ b) $-3$ c) $6i$ d) $-4-5i$

17. Establecer la ecuación de $2^0$ cuyas soluciones son $1-3i$, $1+3i$

    Solución: $x^2-2x+10$

18. Establecer la ecuación de $2^0$ cuyas soluciones son $2+4i$, $1-2i$

    Solución: $x^2-(3+2i)x+10$

19. Efectuar

    a) $5^{(4} =$

    b) $20^{(3} =$

    c) $x^{(5} =$

    d) $28^{(x} =$

    Solución: a) 120, b) 6840, c) $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, d) $28.27.26\ldots(28-x+1)$

20. Efectuar
    $$\frac{(2x-1)!+(2x-3)!}{(2x)!}$$
    Solución: $\dfrac{(2x-1)(2x-2)+1}{2x(2x-1)(2x-2)}$

21. Efectuar

    a) $\dbinom{7}{3} =$

    b) $\dbinom{30}{6} =$

    c) $\dbinom{x-1}{3} =$

    d) $\dbinom{2x-1}{h-2} =$

    Solución: a) 35, b) 593775, c) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$, d) $\dfrac{(2x-1)(2x-2)(2x-3)\ldots(2x-h+2)}{(h-2)(h-3)\ldots3.2.1}$

22. Simplificar $\dbinom{x+1}{5} : \dbinom{x-1}{4} =$

    Solución: $\dfrac{x^2+x}{5x-20}$

23. Resolver $\dbinom{x+1}{2} + \dbinom{x}{2} + \dbinom{x-1}{2} = 136$

    Solución: $-9, 10$

24. Resolver $\dbinom{x}{3} = \dbinom{x}{2}$

    Solución: 5

25. Resolver $\dbinom{3}{1} + \dbinom{x}{2} = \dbinom{x+1}{2}$

    Solución: 3

# 2 POTENCIAS Y RADICALES

## 2.1 Potencias de números reales

Dado un número real $a$ y un entero positivo $n$ se define potencia de base $a$ y exponente $n$ como el producto de $a$ por sí mismo $n$ veces.

$$a^n = a \cdots^{(n)} \cdots a$$
$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$

Se define potencia de base $a$ y exponente negativo $-n$, como 1 partido por la misma potencia positiva, es decir: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

## 2.2 Propiedades de las potencias

1. $(a.b)^x = a^x.b^x$

   Para elevar un producto a una potencia se elevan cada uno de los factores.

2. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

   Para elevar un cociente a una potencia, se eleva el numerador y el denominador.

3. $(a^x)^y = a^{x.y}$ Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes.

4. $a^x.a^y = a^{x+y}$ Para multiplicar dos potencias de igual base se suman los exponentes.

5. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ Para dividir dos potencias de la misma base se restan los exponentes.

**Observaciones:** 1) con sumas o restas de potencias la unica operacion posible es sacar factor común. Por ese motivo: $3^2 + 5^2 = (3+5)^2 = 8^2$ ESTA MUY MAL.

2) al elevar una fracción a una potencia negativa resulta: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^x$

## 2.3 Igualdades notables

1. $(-a)^2 = a^2$. Ejemplo: $(-x+3)^2 = (x-3)^2$

2. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el doble del primero por el segundo.

   Ejemplo: $[(x+y)+2z]^2 = (x+y)^2 + (2z)^2 + 4z(x+y)$

3. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. El cuadrado de una resta es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, menos el doble del primero por el segundo.

   Ejemplo: $(2x-y^2)^2 = 4x^2 + y^4 - 4xy^2$

4. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados.

   Ejemplo: $(x^4-1) = (x^2+1)(x^2-1)$

### 2.4 Notación científica

En las calculadoras aparecen expresiones del tipo: $8'37341. - 24$ que significan $8'37341.10^{-24}$;

Se llama notación científica de un número si éste se expresa por una cifra luego la coma decimal y decimales, multiplicado por una potencia entera de 10;
esquemáticamente: $A'BCD\ldots .10^N \quad N \in Z$
$3'247.10^{-4} = 3'247.\dfrac{1}{10^4} = 3'247.\dfrac{1}{10000} = 0'0003247$

Ejemplo: Efectuar y dar el resultado en notacion cientifica.

$$\frac{3'2.10^{-7} + 5'4.10^{-8}}{2.10^{17}} = \frac{3'2.10.10^{-1}.10^{-7} + 5'4.10^{-8}}{2.10^{17}} = \frac{32.10^{-8} + 5'4.10^{-8}}{2.10^{17}} = \frac{(32 + 5'4)10^{-8}}{2.10^{17}} =$$
$$\frac{37'4.10^{-8}}{2.10^{17}} = 18'7.10^{-25} = \frac{18'7}{10}.10.10^{-25} = 1'87.10^{-24}$$

Se caracteriza porque después de la primera cifra hay coma.

### 2.5 Radicales

Son del tipo $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{17}$, $\sqrt[3]{64}$.
Dado un número real $a$ y un número natural $n$ distinto de 0 , se dice que el número $b$ es raíz de índice $n$ del número $a$ cuando la potencia de $b$ de exponente $n$ es $a$. Es decir:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ cuando } b^n = a$$

**Observaciones:** 1) Se dan los siguientes nombres en $\sqrt[n]{a} = b$
$a$ = radicando, $b$ =raíz, $n$ = índice ($n = 2$ no se pone), $\sqrt[n]{a}$ = radical

2)

$$\text{RADICANDO POSITIVO} \begin{cases} \text{índice par} & \longrightarrow \quad \text{2 raíces; ejemplo: } \sqrt{4} = \pm 2 \\ \text{índice impar} & \longrightarrow \quad \text{1 raíz; ejemplo: } \sqrt[3]{125} = 5 \end{cases}$$
$$\text{RADICANDO NEGATIVO} \begin{cases} \text{índice par} & \longrightarrow \quad \text{ninguna raíz real; ejemplo: } \sqrt{-4} \\ \text{índice impar} & \longrightarrow \quad \text{1 raíz; ejemplo: } \sqrt[3]{-8} = -2 \end{cases}$$

### 2.6 Propiedades de los radicales

Se deducen de las propiedades de las potencias:

1. Raíz de un producto es el producto de las raíces $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
2. Raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. Raíz de una raíz es la raíz de índice el producto de los índices. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
4. Raíz de una potencia es igual a la potencia de la raíz $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$, (salvo signo)
5. Una raíz no varía si se multiplica o se divide el índice y el exponente por un mismo número es decir: $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n.h]{a^{p.h}}$

**Observación:** con raíces de sumas o sumas de raíces no hay nada que hacer.
Ejemplo: $\sqrt{a^2 + 4} = a + 2$ MUY MAL

## 2.7 Cálculo con radicales

**Simplificar radicales:** se dividen exponentes e índices por un mismo número, ejemplo:
$\sqrt[4]{9a^4b^8} = \sqrt[4]{3^2a^4b^8} = \sqrt{3a^2b^4}$

**Extraer factores fuera de la raíz:** se divide el exponente por el índice y dentro queda el factor elevado al resto. Saliendo fuera del radical el factor elevado al cociente. Ejemplos:

- $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = 2^2\sqrt[3]{2}$
- $\sqrt[4]{32a^5b^4c^{14}d^3} = \{32 = 2^5\} = 2abc^3\sqrt[4]{2ac^2d^3}$

**Introducir factores dentro del radical:** se multiplica el exponente por el índice. Ejemplos:

- $\dfrac{3b^2}{a^5}\sqrt[5]{\dfrac{b}{c+a^3}} = \sqrt[5]{\dfrac{3^5b^{10}b}{a^{25}(c+a^3)}} = \sqrt[5]{\dfrac{3^5b^{11}}{a^{25}(c+a^3)}}$
- $\dfrac{3x^2}{2x+1}\sqrt{\dfrac{2x+1}{12x^5}} = \sqrt{\dfrac{3^2x^4(2x+1)}{(2x+1)^2 12x^5}} = \sqrt{\dfrac{3}{4(2x+1)x}}$

**Reducir a una raíz:** Se reducen primero a común índice que es el mínimo común múltiplo de los índices. Ejemplos:

- $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt{3a^2}\sqrt[4]{b^3}} = \dfrac{\sqrt[12]{a^8b^4}}{\sqrt[12]{3^6a^{12}}\sqrt[12]{b^9}} = \sqrt[12]{\dfrac{a^8b^4}{3^6a^{12}b^9}} = \sqrt[12]{\dfrac{1}{3^6a^4b^5}}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{2x^4y^2}}{\sqrt[6]{5(x-1)^2}\sqrt{9x^3y^{12}}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^2x^8y^4}}{\sqrt[6]{5(x-1)^2}\sqrt[6]{9^3x^9y^{36}}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^2x^8y^4}{5(x-1)^2 9^3x^9y^{36}}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^2}{5(x-1)^2 9^3xy^{32}}}$

**Operaciones con radicales semejantes:** Se extraen factores y se saca factor común.Ejemplo:
$\sqrt{27} - \sqrt{75} - \sqrt{300} = \sqrt{3^3} - \sqrt{5^2 3} - \sqrt{10^2 3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = -12\sqrt{3}$

**Racionalizar** Racionalizar es quitar raíces del denominador:

1. Denominador sin sumas de raíces. Para racionalizar en este caso se multiplica el numerador y el denominador por el radical adecuado. Ejemplos:
   - $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   - $\dfrac{a}{3\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3.5} = \dfrac{a\sqrt{5}}{15}$
   - $\dfrac{2}{\sqrt[7]{5^3}} = \dfrac{2\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^3}\sqrt[7]{5^4}} = \dfrac{2\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^3 5^4}} = \dfrac{2\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^7}} = \dfrac{2\sqrt[7]{5^4}}{5}$
   - $\dfrac{7}{\sqrt[3]{25}} = \dfrac{7}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{7\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}\sqrt[3]{5}} = \dfrac{7\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{7\sqrt[3]{5}}{5}$
   - $\dfrac{1-x}{\sqrt[5]{x^{12}}} = \dfrac{1-x}{x^2\sqrt[5]{x^2}} = \dfrac{(1-x)\sqrt[5]{x^3}}{x^2\sqrt[5]{x^2x^3}} = \dfrac{(1-x)\sqrt[5]{x^3}}{x^2x} = \dfrac{(1-x)\sqrt[5]{x^3}}{x^3}$
2. Denominador con sumas o restas de raíces: Se multiplica numerador y denominador por el conjugado, (solo sirve para raíces cuadradas). Ejemplos:

- $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{5})} = \dfrac{3\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2} = \dfrac{6+3\sqrt{10}}{2-5} = \dfrac{6+3\sqrt{10}}{-3} =$ $-2-\sqrt{10}$
- $\dfrac{3\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}(x-\sqrt{3})}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})} = \dfrac{3\sqrt{3}x-9}{x^2-3}$

## 2.8 Potencias de exponente fraccionario

Definimos potencias de base $a$ y exponente $\dfrac{p}{q}$ como la raíz de índice el denominador de la potencia de exponente el numerador:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Si el exponente es negativo: $a^{-\frac{p}{q}} = \dfrac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$
Las propiedades son las mismas de otras potencias.

Ejemplo:
Simplificar: $\dfrac{8^{\frac{2}{3}}6^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{-5}{3}}12^{\frac{4}{8}}} = \dfrac{(2^3)^{\frac{2}{3}}(3.2)^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{-5}{3}}(2^2.3)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2^2 3^{\frac{3}{5}}2^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{-5}{3}}2.3^{\frac{1}{2}}} = 2^{2+\frac{3}{5}+\frac{5}{3}-1}.3^{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{49}{15}}.3^{\frac{1}{10}}$

### Problemas de potencias y radicales

1. Calcular las potencias:
   $(-3)^2$; $-3^2$; $(-0'15)^2$; $0'01^4$; $(-2/3)^3$
   Solución: $9, -9, 0'0225, 0'00000001, -8/27$
2. Reducir a una sola potencia
   a) $(-1/2)^2.(1/2)^5.(1/2)^3.(1/2) =$
   b) $\{[(-0'1)^2]^3\}^3 =$
   c) $[(-1/2)^2]^5 =$
   Solución: a) $(1/2)^{11}$, b) $(0'1)^{18}$, c) $(1/2)^{10}$
3. Efectuar $(-1/2)^2 + (3/2)^3 - (5/3)^2 =$
   Solución: $61/72$
4. Efectuar $\{[(-3/5)^3.(-3/5)^2] : (-3/5)^{15}\} - (4/3)^3(3/2)^4 =$
   Solución: $-11$
5. Calcular $\left(\dfrac{\frac{3}{2}-4}{1-\frac{8}{3}}+\dfrac{1}{9}\right)^4 - \left(1+\dfrac{2}{3}\right)^2\left(1-\dfrac{2}{4}\right)^3 =$
   Solución: $77/5$
6. Calcular
   a) $(-1/2)^{-1} =$
   b) $[(16/5) - 1'2]^{-3} =$
   c) $\left(\dfrac{1}{5}-2\right)^{-2} =$
   Solución: a) $-1$, b) $1/8$, c) $1/3'24$
7. Simplificar
   a) $\dfrac{3024}{4200}$
   b) $\dfrac{441}{1350}$
   c) $\dfrac{1331}{165}$
   Solución: a) $18/25$, b) $49/150$, c) $121/15$
8. Simplificar
   a) $\dfrac{a^2-9}{2a-6}$
   b) $\dfrac{14a^2+3a^2}{7a}$
   c) $\dfrac{a^2-ab2+b`2}{a^2-b^2}$
   Solución: a) $(a+3)/2$, b)no se puede, c) $(a-b)/(a+b)$

9. Simplificar

a) $\dfrac{(p^2-4)^{-1}}{(p^2-2p)^{-1}}$

b) $(z^4-1)(z^2-2z+1)^{-1}$

Solución: a) $p/(p+2)$, b)$[(z+1)(z^2+1)]/(z-1)$

10. Efectuar y poner el resultado en forma de notación científica:

a) $1'2.10^{15}.2.10^{-8}$

b) $\dfrac{4'2.10^{13}+2.10^{19}}{2.10^{-8}}$

c) $\dfrac{3'2.10^7-4.10^8}{2.10^{-8}+10^5}$

Solución: a) $2'4.10^7$, b) $1'21.10^{22}$, c) $-3'6.10^{13}$

11. Calcular las siguientes raíces por el método más rápido

a) $\sqrt{8.27.64}$

b) $\sqrt[3]{0'064^2}$

c) $\sqrt{\dfrac{25}{0'0001}}$

Solución: a) 27, b) $0'4$, c) 500

12. Efectuar

$$\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$$

Solución: 2

13. Efectuar

$$\sqrt{3a^2+\sqrt{6a^4+\sqrt{25a^8}}}$$

Solución: $a\sqrt{3+\sqrt{11}}$

14. Extraer factores del radical

a) $\sqrt[3]{54}$

b) $\sqrt[5]{\dfrac{27x^{10}}{y^8}}$

c) $\dfrac{x.y}{2}\sqrt{\dfrac{n^6}{8x^4y^3z}}$

Solución: a) $3\sqrt[3]{2}$, b) $\dfrac{x^2}{y}\sqrt[5]{\dfrac{3^3}{y^3}}$, c) $\dfrac{xyn^3}{4x^2y}\sqrt{\dfrac{1}{2yz}}$

15. Introducir factores dentro del radical

a) $x\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

b) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{81}{4}}$

c) $\dfrac{a-b}{a+b}\sqrt{\dfrac{a^2+b}{a-b}}$

Solución: a) $\sqrt{x}$ , b) $\sqrt[3]{6}$ , c) $\sqrt{\dfrac{(a-b)(a^2+b)}{(a+b)^2}}$

16. Efectuar $2a\sqrt{3}-\sqrt{27a^2}+2\sqrt{12}$

Solución: $a\sqrt{3}$

17. Efectuar $4\sqrt{12}-\dfrac{3}{2}\sqrt{48}+\dfrac{2}{3}\sqrt{27}+\dfrac{3}{5}\sqrt{75}$

Solución: $7\sqrt{3}$

18. Efectuar $3\sqrt[3]{\dfrac{2x}{9}}-2\sqrt[3]{\dfrac{3x}{4}}+\sqrt[3]{\dfrac{6x}{5}}$

Solución: $\sqrt{\dfrac{6x}{5}}$

19. Racionalizar $\dfrac{1}{2-2\sqrt{2}}$

Solución: $\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$

20. Racionalizar $\dfrac{6(3-y}{\sqrt[3]{(3-y)^2}}$

Solución: $6\sqrt[3]{3-y}$

21. Racionalizar $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$

Solución: $(19-4\sqrt{15})/11$

22. Efectuar racionalizando:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{2}{3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}=$$

Solución: $(-\sqrt{2}+15-12\sqrt{3})/6$

23. Simplificar

$$\frac{2\sqrt{2x^4-x^3}+\sqrt{2x^2-7x^4}}{x^2-x}=$$

Solución: $\dfrac{2\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{2-7x^2}}{x-1}=$

24. Extraer factores fuera de la raíz:

$$\sqrt{\frac{4+4x+x^2}{2^6x^3y^4}}=$$

Solución: $\dfrac{x+2}{8y^2x}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

25. Efectuar racionalizando

$$\frac{1}{2+3\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}$$

Solución: $\dfrac{-2+3\sqrt{3}-45\sqrt[6]{3}}{23}$

26. Introducir factores $\dfrac{(2+x)^2}{8xy^2}\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

Solución: $\sqrt{\dfrac{(2+x)^4}{8^2x^3y^4}}$

27. Simplificar $\dfrac{\sqrt{3x^3-8x^2}-\sqrt{x^2+3x^6}}{x-\sqrt{x^2-x^3}} =$

Solución: $\dfrac{\sqrt{3x-8}-\sqrt{1+3x^4}}{1-\sqrt{1-x}}$

28. Efectuar y dar el resultado en forma de notación científica $\dfrac{3'2.10^{10}-4'2.10^{8}}{5.10^{-2}}$

Solución: $6'31.10^{21}$

29. Simplificar

$$\frac{(9-6a+a^2)\sqrt{a^2-9}}{(a-3)\sqrt{a^2-3^2}}$$

Solución: $a-3$

30. Efectuar racionalizando

$$\frac{1}{3-\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{3}} - \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} =$$

Solución: $\dfrac{-81+\sqrt{2}}{7}$

31. Simplificar $\dfrac{15^{\frac{2}{3}}.9^{\frac{3}{6}}}{25^{-\frac{5}{4}}}$

Solución: $3^{\frac{5}{3}}.5^{\frac{19}{6}}$

32. Extraer factores

$$\frac{1}{3xy^2}\sqrt{\frac{5^4(x-2)^3}{.}8^3x^5y^3} =$$

Solución: $\sqrt{\dfrac{x-2}{8xy}}$

33. Efectuar

$$3\sqrt[3]{100} - 4\sqrt[3]{100.000} - 11\sqrt[3]{100.000.000}$$

Solución: $-12.10^4\sqrt[3]{100}$

34. Simplificar $\dfrac{\sqrt{x^4-x^6+x^2}+7x}{2x}$

Solución: $\dfrac{\sqrt{x^2-x^4+1}+7}{2}$

35. Efectuar $\dfrac{3.10^{13}+1'2.10^{14}}{3.10^{12}}$

Solución: $50$

36. Efectuar $\dfrac{z^3-z}{2z^2-4z+2}$

Solución: $\dfrac{z^2+z}{2(z-1)}$

# 3 ECUACIONES

## 3.1 Propiedades de las igualdades y aplicación a la resolución de ecuaciones

1. Si se suma o resta un mismo número a los dos miembros de una igualdad la igualdad se conserva.

   **Aplicación a ecuaciones:**

   Para la transposición de términos: un término que está sumando pasa restando. Un término que está restando pasa sumando

   Ejemplos:

   | | |
   |---|---|
   | $3+x=5$ | $3x+2=5-2x$ |
   | $-3+3+x=5-3$ | $3x+2x=5-3$ |
   | $x=5-3$ | $5x=3$ |

2. Si se multiplican los dos miembros de una igualdad por un mismo número, la igualdad se conserva.

   Si se dividen los dos miembros de una igualdad por un mismo número, distinto de 0, la igualdad se conserva.

   **Aplicación a ecuaciones:**

   $1^a$ Aplicación : quitar denominadores; se multiplica todo por el mínimo común múltiplo de los denominadores. Se va multiplicando cada numerador por lo que le falta a su denominador para ser el denominador común.

   Ejemplo: $\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{3x}{5}=1 \quad 5(2x-1)+3.3x=15$

   $2^a$ Aplicación: despejar la $x$ pasando su coeficiente al otro miembro.

   Ejemplo: $\begin{array}{ll} -5x=3 & \quad \frac{x}{3}=7 \\ x=-\frac{3}{5} & \quad x=21 \end{array}$

**Observaciones:**

1. Si al resolver una ecuación llegamos a algo del tipo: $3x=3x+2$, quedaría $0=2$, o sea, no hay solución.

2. Si al resolver una ecuación llegamos a algo del tipo: $2(5x-3)=10x-6$, o sea $10x-6=10x-6$ quedaría $0x=0$, entonces cualquier número es solución, se pierden de vista las soluciones si se simplifica.

3. Si en una ecuación la incógnita está en algún denominador o debajo de raíces, hay que comprobar las soluciones.

   Ejemplo: $\dfrac{x^2-1}{x+1}=0$

   Para anular una fracción se anula el numerador

   $x^2-1=0, \quad x^2=1, \quad x=\pm 1$ $\quad \begin{array}{l} \text{para 1: } \dfrac{1-1}{1+1}=0 \text{ si es solución} \\ \text{para } -1\text{: } \dfrac{1-1}{-1+1}=\dfrac{0}{0} \text{ no es solución} \end{array}$

   Es decir, no sirven soluciones que anulen denominadores.

Ejemplo: $\sqrt{x^2-16}=3$

$\sqrt{(x^2-16)^2}=3^2$; $\quad x^2-16=9$; $\quad x^2=25$; $\quad x=\pm 5$ las dos son soluciones

## 3.2 Ecuación de segundo grado

La expresión general de una ecuación de segundo grado es $ax^2+bx+c=0$

Cuando alguno de los coeficientes es igual a 0 se llama **ecuación incompleta** de segundo grado.

Hay que tener en cuenta quer no hay raíces cuadradas de números negativos.

**I) no hay término en $x$ :** O sea $b=0$, $ax^2+c=0$; $\quad ax^2=-c$; $\quad x=\pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

Ejemplos:

$2x^2-7=0$

$2x^2=7$

$x^2=\dfrac{7}{2} \quad x=\pm\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

$3x^2+5=0$

$3x^2=-5$

$x^2=\dfrac{-5}{3} \quad x=\pm\sqrt{\dfrac{-5}{3}}$ que no es solución real

**II) no hay término independiente:** O sea $c=0$, $ax^2+bx=0$. Se saca factor común y se aplica que para que un producto se anule ha de anularse uno de los factores.

Ejemplo: $3x^2+2x=0$;

$$x(3x+2)=0 \quad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2: \quad 3x+2=0 \quad 3x=-2 \quad x_2=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

**III) Caso general. Ecuación completa:** $ax^2+bx+c=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Fórmula reducida para cuando el coeficiente de la x es un número par:

Sea $b'=\dfrac{b}{2}$; $\quad x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

Ejemplo:

$3x^2-10x+4=0$; $\quad b'=-5$; $\quad x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-12}}{3}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{3}$

**Demostración de la fórmula de la ecuación de $2^0$ grado** Multiplicando los dos miembros de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ por $4a$ resulta:

$4a(ax^2+bx+c)=0$

$4a^2x^2+4bxa+4ac=0$ Transponemos: $4ac$

$4a^2x^2+4abx=-4ac$

Sumamos $b^2$ a los dos miembros para completar el cuadrado del primer miembro; se obtiene:

$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$

En el primer miembro tenemos el cuadrado de un binomio $2ax+b$; luego:

$(2ax+b)^2=b^2-4ac$

De donde: $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$ y despejando $x$ queda: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

## 3.3 Ecuaciones bicuadradas

Ejemplo:

1. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

   Se hace el cambio de variable $y = x^2$; resulta $y^2 = x^4$; queda:

   $$y^2 - 5y - 36 = 0; \quad y = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

   $$y_1 = 9; \quad x^2 = 9; \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

   $y_1 = -4; \quad x^2 = -4; \quad x = \pm\sqrt{-4}$; No da solución real

2. $2x^4 - 2 = 0$

   $2(x^4 - 1) = 0; \quad ((x^2)^2 - 1) = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x-1)(x+1) = 0$

   las soluciones resultan de anular cada factor: $(x^2+1)$ nunca se anula; $x = 1; x = -1$

3. $2x^4 - 3x^2 - 10 = 0$

   $$2y^2 - 3y - 10 = 0 \quad y = \frac{3 \pm \sqrt{89}}{4} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{3+\sqrt{89}}{4} & \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{89}}{4}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{89}}{4}} \end{cases} \\ x^2 = \frac{3-\sqrt{89}}{4} & \text{no da soluciones reales} \end{cases}$$

## 3.4 Ecuaciones irracionales

Se caracterizan porque la incógnita está debajo de una raíz.

Se resuelven aislando sucesivamente los radicales y elevando al cuadrado. Hay que comprobar las soluciones.

Ejemplos:

1. $18 - \sqrt{x+10} = 2$

   $\sqrt{x+10} = 16$ elevando al cuadrado $\left(\sqrt{x+10}\right)^2 = 16^2; \quad x + 10 = 256; \quad x = 246$

   comprobamos: $18 - \sqrt{246+10} = 2$ Sirve la solución

2. $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-3} = 6$

   $\sqrt{x-9} = 6 - \sqrt{x-3}$ elevando al cuadrado:

   $x - 9 = \left(6 - \sqrt{x-3}\right)^2; \quad x - 9 = 36 + (x-3) - 12\sqrt{x-3}; \quad x - 9 = 36 + x - 3 - 12\sqrt{x-3}$

   $12\sqrt{x-3} = 36 + x - 3 - x + 9; \quad 12\sqrt{x-3} = 42$ Simplificamos $2\sqrt{x-3} = 7$

   elevando al cuadrado: $\left(2\sqrt{x-3}\right)^2 = 7^2$

   $$4(x-3) = 49; \quad x - 3 = \frac{49}{4}; \quad x = \frac{49}{4} + 3 = \frac{61}{4}$$

   Comprobamos $x \approx 15' \ldots$ que al sustituir sale positivo debajo de las raíces. Luegoo es válida $x = \dfrac{61}{4}$

### 3.5 Sistemas de ecuaciones

Una ecuación es una igualdad en la que aparece una o varias incógnitas:
1)$x^2 - 3x = -2$
2)$3x - 2y + 5z - 3 = 0$
**Solución** de una ecuación son lo números que al sustituir en las incógnitas cumplen la igualdad:
en el ejemplo 1) las soluciones son 1 y 2;
en el ejemplo 2) $x = 2, y = 4, z = 1$ es una solución pero hay infinitas soluciones dependientes de dos parámetros, pasando por ejemplo la $y$ y la $z$ como parámetros al segundo miembro quedaría: $x = \dfrac{2y}{3} - \dfrac{5z}{3} + 1$, dando valores a $y$ y a $z$ obtenemos los de $x$.
Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones.
Cuando las incógnitas no tienen exponente (o sea tienen exponente 1) se dice que es ecuación lineal.
Se llama **solución del sistema** a los números que satisfagan las ecuaciones es decir que al sustituir en el sistema verifican todas las ecuaciones.

### 3.6 Método de sustitución

Se despeja una incógnita en una ecuación y se sustituye en las otras:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = 9 \\ x - 5y = -10 \end{array}\right. \qquad x = 5y - 10 \qquad \begin{array}{l} 2(5y - 10) + 3y = 9 \\ 10y - 20 + 3y = 9 \\ 13y = 29 \end{array} \qquad y = \frac{29}{13} \qquad x = 5\frac{29}{13} - 10 = \frac{15}{13}$$

### 3.7 Método de reducción

Se multiplican las ecuaciones por números convenientes para que al sumar desaparezca alguna incógnita:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = 9 \\ x - 5y = -10 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \text{si multiplicamos por } -2 \text{ abajo y su-} \\ \text{mamos desaparecerá la } x \end{array} \left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = 9 \\ \underline{-2x + 10y = 20} \end{array}\right. \qquad 13y = 29$$

$y = \dfrac{29}{13}$, sustituyendo en la $2^a$ obtenemos la $x$: $x = \dfrac{15}{13}$

### 3.8 Método de igualación

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones y se igualan los segundos miembros:

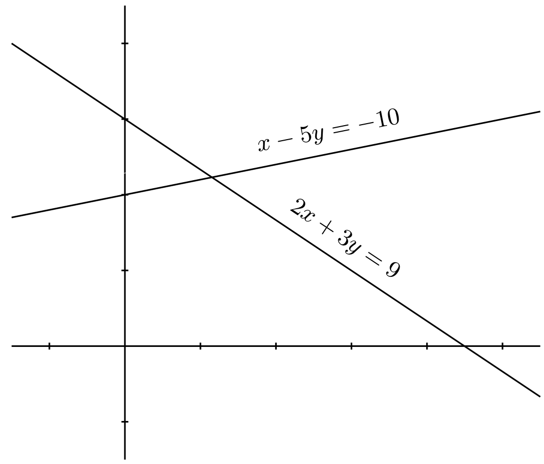
$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = 9 \\ x - 5y = -10 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{-3y+9}{2} \\ x = 5y - 10 \end{array}\right. \qquad \frac{-3y + 9}{2} = 5y - 10 \qquad \begin{array}{l} 9 - 3y = 10y - 20 \\ 9 + 20 = 10y + 3y \\ 29 = 13y \end{array}$$

$y = \dfrac{29}{13}, \quad x = \dfrac{15}{13}$

## 3.9 Método gráfico

Se representan en los ejes:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x - 5y = -10 \end{cases}$$




$2x + 3y = 9$

| $x$ | 0 | 9/2 |
|---|---|---|
| $y$ | 3 | 0 |

$x - 5y = -10$

| $x$ | 0 | 5 |
|---|---|---|
| $y$ | 2 | 3 |

### Problemas de ecuaciones y sistemas

1. Resolver $\dfrac{x+1}{4} + \dfrac{3x-9}{10} = \dfrac{2x-3}{5} - \dfrac{1}{2}$

   Solución: $-3$

2. Resolver $\dfrac{x-4}{5} = \dfrac{2x+3}{3}$

   Solución: $-3'8$

3. Resolver $\dfrac{2}{3x} + \dfrac{30}{4} = \dfrac{3}{2x} - \dfrac{1}{6}$

   Solución: $5/46$

4. Resolver $\dfrac{x-2}{3} + \dfrac{2x+1}{4} = 3 - \dfrac{2x-3}{6}$

   Solución: $47/14$

5. Resolver $\dfrac{3x-2}{9} + x - \dfrac{8x}{3} = \dfrac{5x-4}{-3}$

   Solución: $10/9$

6. Resolver $\dfrac{5x-3}{10} + \dfrac{3x-2}{4} = \dfrac{2-3x}{4} + 4x$

   Solución: $-13/20$

7. Resolver $\dfrac{x-m}{n} = \dfrac{x-n}{m}$

   Solución: $m+n$

8. Resolver $3x^2 + 2x - 1 = 0$

   Solución: $1/3, -1$

9. Resolver $3x^2 - 15 = 0$

   Solución: $\pm\sqrt{5}$

10. Resolver $5x^2 + 7x = 0$

    Solución: $0, -7/5$

11. Resolver $x^2 + x + 1 = 0$

    Solución: no tiene solución real

12. Resolver $2x^2 + 12x + 18 = 0$

    Solución: $-3$ doble

13. Resolver $5x - x^2/3 = 3x$

    Solución: 0, 6

14. Resolver $\dfrac{x^2}{5} + 5 = \dfrac{4x^2}{5} - 10$

    Solución: $\pm 5$

15. Resolver $3\sqrt{3}x^2 - \sqrt{6} = 0$

    Solución: $\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{3}}$

16. Resolver $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x - 3x^2 = 0$

    Solución: $0, \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

17. Resolver $9x^2 - 12x + 7 = 0$

    Solución: no tiene solución real

18. Resolver $2x^2 + 40x + 13 = 0$

    Solución: $-0'65, -19'6$

19. Resolver $\dfrac{5(x-1)}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x-1}$

    Solución: $\dfrac{13 \pm \sqrt{217}}{6}$

20. Resolver $\dfrac{5x^2-3}{8} + \dfrac{x}{6} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{x^2}{8}$

    Solución: $1'2, -0'3$

21. Resolver $\dfrac{x^2+2}{x^2-6} = \dfrac{2x^2-23}{21-x^2}$

    Solución: $\pm\sqrt{-2}\quad noreal, \pm 3$

22. Resolver $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

    Solución: $\pm\sqrt{-9}\quad noreal, \pm 2$

23. Resolver $27x^4 - 9x^2 = 0$

    Solución: $\pm\sqrt{-1/3}\quad noreal, 0$

24. Resolver $\sqrt{3x-2} - 4 = 0$

    Solución: 6

25. Resolver $\sqrt{x+4} = 3 - \sqrt{x-1}$

    Solución: 13/9

26. Resolver $\dfrac{x-2}{4} - \dfrac{3x-5}{2} = \dfrac{2x}{6}$

    Solución: 24/19

27. Resolver
    $$\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{7}\right) = 4 + \frac{8}{9}$$
    Solución: 5

28. Resolver $2 + \sqrt{x-5} = 13 - x$

    Solución: 14, 9

29. Resolver por todos los métodos
    $$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases}$$
    Solución: $x = 24/13, y = -42/13$

30. Resolver por todos los métodos
    $$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$
    Solución: $x = 1, y = 3$

31. Resolver $\begin{cases} x - y = 2(x+y) \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

    Solución: $x = 0, y = 0$

32. Resolver $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ 3(x+y-1) = x - y + 1 \end{cases}$

    Solución: $x = 1/2y = 3/4$

33. Resolver $\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+1}{3} = 0 \\ \frac{2x+y}{3} - \frac{x+y+2}{4} = 0 \end{cases}$

    Solución: $x = 11/7, y = -13/7$

34. Resolver
    $$\begin{cases} 3x - (9x+y) = 5y - (2x+9y) \\ 4x - (3y+7) = 5y - 47 \end{cases}$$
    Solución: $x = 11/44, y = 5/11$

35. Resolver
    $$\begin{cases} x(y-2) - y(x-3) = -14 \\ y(x-6) - x(y+9) = 54 \end{cases}$$
    Solución: $x = -2, y = -6$

36. Resolver $\begin{cases} \frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0 \\ \frac{x-4}{2} - \frac{y-2}{5} = 3 \end{cases}$

    Solución: $x = 162/23, y = 216/23$

37. Resolver $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = -\frac{13}{36} \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y+1}{2} = -\frac{2}{3} \end{cases}$

    Solución: $x = 1/2, y = 4/3$

38. Entre dos estantes de una librería hay 80 libros. Si se pasan 10 libros del segundo al primer estante, ambos tienen el mismo número de libros. ¿Cuántos había al principio en cada uno?.

    Solución: $x = 30, y = 50$

39. La diferencia de los cuadrados de dos números enteros es igual a 240 veces el menor y sumando 90 unidades a la diferencia de cuadrados es 30 veces el mayor. Hallar dichos números.

    Solución: $x = 12, y = 3$

40. Al invertir el orden de las cifras de un número de dos dígitos, este número queda disminuido en 36 unidades. Hallar el número sabiendo que dichas cifras suman 12.

    Solución: 84

41. Un abuelo dice a sus nietos: multiplicando mi edad por su cuarta y su sexta parte y dividiendo el producto por los 8/9 de la misma hallaréis 243 años, ¿cuál es mi edad?.

    Solución: 72

42. Dos embarcaciones salen al mismo tiempo para un puerto que dista 224 Km. Una de ellas navega a 2 Km/h más que la otra, y llega al punto donde se dirigen 2 horas antes que la otra. Halla las velocidades.

    Solución: 14

43. Una factura de 410 pts es pagada con 3 dólares y 2 libras esterlinas y otra de 2940 pts con 10 dólares y 20 libras. Calcular el cambio a que están los dólares y las libras.

    Solución: libra: 118 pts, dólar: 58 pts

44. Al unir los dos puntos medios de dos lados desiguales de un rectángulo se obtiene un segmento de 50 m de longitud. Hallar el área del rectángulo sabiendo que los lados son entre sí como 4 es a 3.

    Solución: 6400

45. Se llena una caja de forma cúbica con cubitos de un cm de arista y nos sobran 272 cubitos. Se construye otra caja que tiene un cm más de arista y entonces nos faltan 197 cubitos. ¿Cuántos cubitos tenemos?.

    Solución: número cubitos $= y$, arista$= x$, caben $x^3$, $y = 2000$

46. Resolver
    $$\begin{cases} \frac{1}{2x-3y+6} = \frac{1}{3x-2y-1} \\ \frac{6}{x-y+4} = \frac{10}{y+2} \end{cases}$$

    Solución: $x = 73/7, y = 932/133$

47. Resolver $\begin{cases} \frac{6x+9y-4}{4x-6y+5} = \frac{2}{5} \\ \frac{2x+3y-3}{3x+2y-4} = \frac{6}{11} \end{cases}$

    Solución: $x = 4719/2134, y = 27/97$

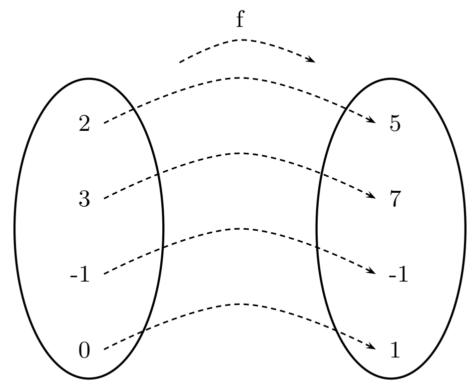
# 4 POLINOMIOS

## 4.1 Función

Una función transforma números en números,
Ejemplo

$$\begin{aligned} f: \quad & Z \longrightarrow Z \\ & x \longrightarrow f(x) = 2x+1 \end{aligned}$$

Esta función de los números enteros en los números enteros le asocia a cada número su doble más uno.




En general una función se representa : $y = f(x)$

$x$ es un elemento cualquiera del conjunto original, se llama variable independiente;

$y$ representa su correspondiente imagen en el conjunto final, se llama variable dependiente.

La forma habitual de dar una función es indicar las operaciones que hay que hacer con la x para obtener su correspondiente imagen y.

## 4.2 Función polinómica. Polinomio

Las funciones polinómicas son las del tipo: $y = 2x^3+43x^2+18x-66, \quad y = x^4-13x, \quad y = 3x-2.$
En general un función polinómica es una función de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

Donde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son numeros reales, se llaman **coeficientes**.
La expresión que hay a la derecha del igual $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ se llama **polinomio**.

Cuando hay un solo sumando se llama monomio y cuando hay dos se llama binomio.
**Grado** de un polinomio es el mayor exponente de $x$ cuyo coeficiente sea distinto de 0.

Dos polinomios son iguales cuando cada coeficiente del mismo grado es igual.
Ejemplo: $(x+1)^2 = x^2+2x+1$. Por tanto dan el mismo resultado para cualquier valor de $x$.

Cuando son distintos, por ejemplo: $2x^2+1 = 2x+4$ es una ecuación. Sólo se cumple la igualdad para algunos valores de $x$: las soluciones de la ecuación.
El conjunto de polinomios se representa $R[x]$.

## 4.3 Operaciones con polinomios

**Suma** El grado de la suma de dos polinomios es menor o igual que el grado de los sumandos:

$f(x) = 1-2x^2+x \longrightarrow$ Grado 2
$g(x) = 2x^2+3x \longrightarrow$ Grado 2

$f(x)+g(x) = 4x+1 \longrightarrow$ Grado 1

La suma verifica las propiedades asociativa, commutativa, elemento neutro: "cero" y elemento simétrico que se llama polinomio opuesto.

Por ejemplo la asociativa se expresa asi: $f(x)+[g(x)+h(x)] = [f(x)+g(x)]+h(x)$

**Producto** El grado del polinomio del producto es la suma de los grados de los polinomios factores.

El producto verifica las propiedades asociativa, commutativa, elemento neutro: "unidad" y además el producto es distributivo respecto de la suma.

Por ello el conjunto de los polinomios es anillo, commutativo y unitario.

## 4.4 Binomio de Newton

Veamos las sucesivas potencias de el binomio $(x+a)$:
$(x+a)^1 = (x+a)$
$(x+a)^2 = x^2 + a^2 + 2xa$
$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$
$(x+a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$
cuyos coeficientes son los del triángulo de Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \end{array}$$

En general, Binomio de Newton:
$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}.a + \binom{n}{2}x^{n-2}.a^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}.a^3 + \ldots + \binom{n}{n}a^n$

$(x-a)^n = x^n - \binom{n}{1}x^{n-1}.a + \binom{n}{2}x^{n-2}.a^2 - \binom{n}{3}x^{n-3}.a^3 + \cdots \pm \binom{n}{n}a^n$
O sea cuando es $(x-a)^n$, se va alternando el signo.

## 4.5 División de polinomios

En los numeros teníamos la división entera: $\begin{array}{r|l} 37 & 12 \\ \cline{2-2} 01 & 3 \end{array}$

Cumpliéndose: "dividendo = divisor $\times$ cociente + resto"

De la misma forma para los polinomios: $\begin{array}{l|l} 4x^3 - 2x^2 + 9x + 1 & 2x^2 - x \\ \cline{2-2} -4x^3 + 2x^2 & \text{2x} \\ \hline 0 + 0 + 9x + 1 & \end{array}$

En los polinomios se puede dividir hasta que el resto es de menor grado que el divisor.

También: dividendo = divisor $\times$ cociente + resto, abreviadamente: $D = d \times Q + R$
$4x^3 - 2x^2 + 9x + 1 = (2x^2 - x).2x + (9x + 1)$
Observamos que el grado del dividendo es igual al grado del divisor más el grado del cociente.

## 4.6 Regla de Ruffini

Es un procedimiento abreviado de división, cuando el divisor es de la forma $x - a$:
Ejemplo: $(2x^3 - 3x^2 + 1) : (x - 8)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 8 & & 16 & 104 & 832 \\ \hline & 2 & 13 & 104 & \boxed{833} \end{array} \qquad \begin{array}{l} Q = 2x^2 + 13x + 104 \\ R = 833 \end{array}$$

## 4.7 Valor numérico de un polinomio

Valor numérico de un polinomio para $x = b$ es lo que resulta de sustituir en el polinomio $x$ por $b$:

Valor numérico para $x = 2$ de $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 7$, es: $f(2) = 5.8 + 2.4 - 7 = 40 + 8 - 7 = 41$

Un número $b$ es **raíz** de un polinomio cuando el valor numérico del polinomio en $b$ es 0, es decir, $b$ es raíz de $f(x)$ cuando $f(b) = 0$.

Ejemplo: 2 es raíz de $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$ porque $f(2) = 3.8 - 5.4 - 4 = 0$

Por tanto, es lo mismo decir que $b$ es raíz del polinomio $f(x)$, que decir que $b$ es solución de la **ecuación** $f(x) = 0$.

Ejemplo:

2 es raíz de $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$, es igual que, 2 es solución de la ecuación $3x^3 - 5x^2 - 4 = 0$.

## 4.8 Teorema del resto

El resto de dividir un polinomio por $x - a$ es igual al valor numérico del polinomio en $a$, es decir, el resto de dividir $f(x)$ por $x - a$ es $R = f(a)$.

Ejemplo: $f(x) = 3x^5 + 4x^2 - 5$, dividido por $x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & -5 \\ 1 & & 3 & 3 & 3 & 7 & 7 \\ \hline & 3 & 3 & 3 & 7 & 7 & \boxed{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} Q = 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 7x + 7 \\ R = 2 \end{array} \qquad f(1) = 2$$

**Consecuencia** Si $b$ es una raíz entera de un polinomio tiene que ser un divisor del término independiente. Por tanto, para buscar las raíces enteras de un polinomio por Ruffini, hay que probar los divisores del término independiente.

**Ejemplo:** Resolver la ecuación: $2x^3 - 5x^2 + 2x - 15 = 0$

Los divisores de $-15$ son $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$

probemos $x = 3$ por Ruffini: $\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 2 & -15 \\ 3 & & 6 & 3 & 15 \\ \hline & 2 & 1 & 5 & \boxed{0} \end{array}$

Como el cociente $2x^2 + x + 5$ es de $2^0$ grado para buscar otras soluciones es mejor resolver la ecuación de segundo grado

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 40}}{4}$ que no da soluciones reales

luego 3 es la única raíz real de $f(x)$.

## 4.9 Descomposición de un polinomio en factores

Ejemplo: en el polinomio de la ecuación anterior la descomposición es:

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 15 = (2x^2 + x + 5)(x - 3)$

Ejemplo: $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ tiene como raíces: $x = -1$ doble; $x = 2$; $x = 3$ la descomposición es: $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = (x + 1)^2(x - 2)(x - 3)$

Los polinomios que no se pueden descomponer son los de grado 1 y los de grado 2 sin raíces reales.

## 4.10 Gráfica de una función

Dada una función $y = f(x)$ , los puntos de coordenadas $(x, f(x))$ representan puntos del plano, el conjunto de ellos es la gráfica de la función.

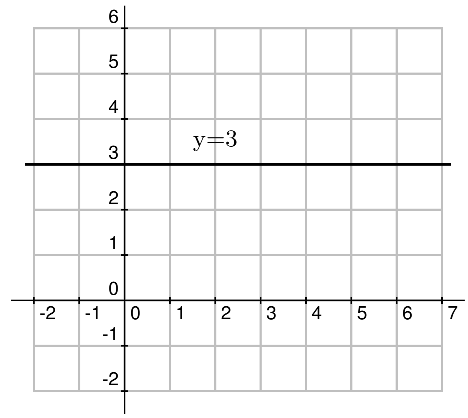
## 4.11 Gráfica de una función polinómica de grado 0

Sea por ejemplo $y = 3$

(podemos pensar en $y = 3 + 0x$)

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 3 | 3 | 3 |

La gráfica de una función polinómica de grado cero, o sea, y = constante, es una recta paralela al eje de abcisas



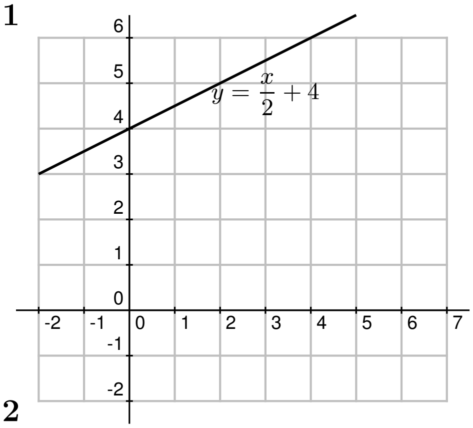

De manera parecida la representación de $x = -5$ será una recta vertical

## 4.12 Gráfica de una función polinómica de grado 1

La gráfica de una función polinómica de grado 1, o sea, $y = ax+b$, es una recta que se determina hallando únicamente dos puntos.

Ejemplo: $y = \dfrac{x}{2} + 4$

| $x$ | 0 | 4 |
|---|---|---|
| $y$ | 4 | 6 |




## 4.13 Gráfica de una función polinómica de grado 2

La gráfica de una función polinómica de grado 2, o sea, $y = ax^2 + bx + c$, es una parábola.

Para representarla hacemos los siguientes pasos:

1. si el coeficiente de $x^2$ es positivo es abierta hacia arriba $\bigcup$

   si el coeficiente de $x^2$ es negativo es abierta hacia abajo $\bigcap$

2. hallamos los puntos de corte con los ejes

   con el eje $OX$ se hace $y = 0$ y se resuelve la ecuación de $2^0$ grado

   con el eje $OY$ se hace $x = 0$

3. hallamos el vértice: la abcisa del vértice viene dada por $x_v = \dfrac{-b}{2a}$, para hallar $y_v$ sustituimos $x_v$ en la función

4. si tenemos pocos puntos para representar hallamos alguno más dando valores a la $x$.

Ejemplos:

1. $y = x^2 - 4x$

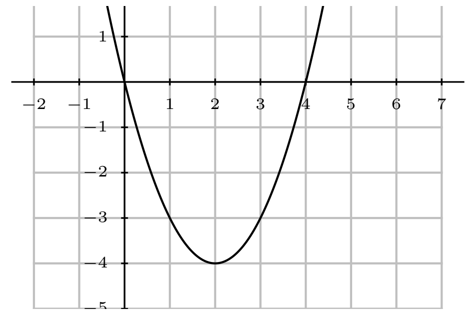
   1) abierta hacia arriba
   2) cortes con los ejes

   con $OX$, $\quad y = 0$, resulta: $0 = x^2 - 4 = x(x-4)$ $\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{matrix}$

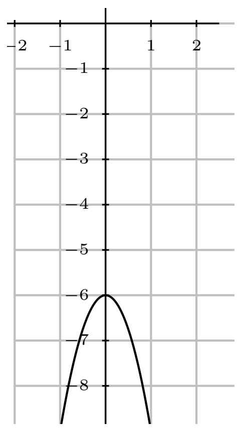
   con $OY$, $\quad x = 0$, ya hallado.

   3) vértice $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2, \quad y_v = -4$

   | | $x$ | $y$ |
   |---|---|---|
   | | 0 | 0 |
   | | 4 | 0 |
   | vértice | 2 | $-4$ |



2. $y = -3x^2 - 6$



   1) abierta hacia abajo
   2) cortes con los ejes
   con $OX$, $\quad y = 0, \quad 0 = -3x^2 - 6$ que no da raíces reales
   con $OY$, $\quad x = 0, \quad y = -6$
   3) vértice $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{6} = 0, \quad y_v = -6$

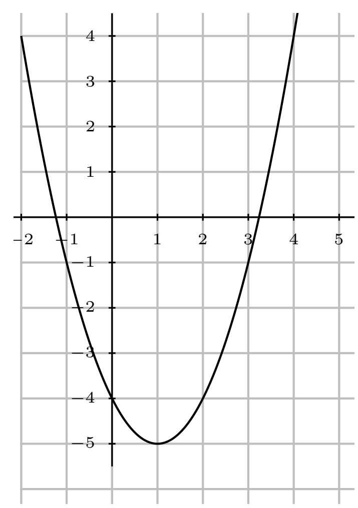
   interesa dar más valores:

   | | $x$ | $y$ |
   |---|---|---|
   | vértice | 2 | $-4$ |
   | | 1 | $-9$ |
   | | $-1$ | 9 |

3. $f(x) = x^2 - 2x - 4$

   1) abierta hacia arriba
   2) Cortes con los ejes
   $y = 0$
   $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \approx \begin{cases} 3'23 \\ -1'23 \end{cases}$
   3) vértice $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

   | | $x$ | $y$ |
   |---|---|---|
   | | $3'23$ | 0 |
   | | $-1'23$ | 0 |
   | vértice | 1 | $-5$ |
   | | 0 | $-4$ |
   | | $-2$ | 4 |



## Problemas de polinomios

1. Siendo $f = 3x^2 - x, \quad g = 3x^4 - x^2$, hallar $f.g - f^2$.

   Solución: $6x^6 - 3x^5 - 6x^4 + 5x^3 - x^2$

2. Multiplicar en línea

   a) $(3x^2 - 2x)(1 - x)$

   b) $(5x^2 - 2x^3)(3x^3 + 2x)$

   Solución: a)$3x^3 + 5x^2 - 2x$

   b) $-6x^6 + 15x^5 - 4x^4 + 10x^3$

3. Calcular $(x+5)^4 =$

   Solución: $x^4 + 20x^3 + 150x^2 + 500x + 625$

4. Calcular $(2x-3)^5 =$

   Solución: $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

5. Efectuar $(5x^4 + 2x^3) : (x^2 - 3x)$

   Solución: $5x^2 + 17x + 51$

6. Efectuar

   $(6x^5 - x^3 + x^2) : (2x^4 - x)$

   Solución: $\mathrm{Q} = 3x$, $\mathrm{R} = -x^3 + 4x^2$

7. Efectuar $(4x^6 - 2x^4 + x) : (2x^4 + x^3)$

   Solución: $\mathrm{Q} = 2x^2 - x - \frac{1}{2}$, $\mathrm{R} = \frac{1}{2}x^3 + x$

8. Siendo $f = 3x^2 - 5x$, $\quad g = 2x^2 + x - 1$. Hallar $f.g - g^2$

   Solución: $-2x^4 - 11x^3 - 5x^3 - 5x^2 + 6x - 1$

9. Efectuar $\dfrac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}}{1 + \frac{4}{x^2-4}} =$

   Solución: $-\dfrac{4}{x^2}$

10. Efectuar

    $\dfrac{ax+ay}{bx-by}.\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}.\dfrac{b}{ay-a} =$

    Solución: $\dfrac{1}{y-1}$

11. Efectuar $\dfrac{16(x-2)^2 - 16x(x-2)}{(x-2)^4} =$

    Solución: $\dfrac{-32}{(x-2)^3}$

12. Dividir $(5x^3 - 2x^2 + 3) : (x^2 - 3) =$

    Solución: $Q = 5x - 2, R = -15x - 3$

13. Dividir por Ruffini $(3x^8 - 5x^2 + 7x) : (x + 1) =$

    Solución: $Q = 3x^7 - 3x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x + 9, R = -9$

14. Dividir por Ruffini $(2x^5 - 3x^2 + 3) : ((x - 2) =$

    Solución: $Q = 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 13x + 26, R = 55$

15. Llamando $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ respectivamente a los dividendos de los tres problemas anteriores, hallar $f(4)$, $g(-1)$, $h(2)$ y $h(-3)$.

    Solución: $f(4) = 291, g(-1) = -9, h(2) = 55, h(-3) = -510$

16. Hallar un polinomio de $2^o$ grado verificando: no tiene término independiente, el valor numérico en 3 es igual al resto de dividirlo por $x-1$, toma el valor 16 en $-2$.

    Solución: $\dfrac{4}{3}x^2 - \dfrac{16}{3}x$

17. Hallar un polinomio de $2^o$ grado que sea divisible por $x-3$, que tome el valor 5 para $x=-2$ y cuyo coeficiente principal sea 1.

    Solución: $x^2 - 2x - 3$

18. Hallar $a$ para que la división siguiente sea exacta $(x^5 - 7x^4 - ax^2 + 1) : (x - 2)$

    Solución: $-79/4$

19. Efectuar

    $(2x^6 - x^5 + x^4) : (x^3 + 2x) =$

    Solución: $Q = 2x^3 - x^2 - 3x + 2, R = 6x^2 - 4x$

20. Efectuar

    $(2x^4 - x^3) : (2x^3 + x) =$

    Solución: $Q = x - 1/2, R = -x^2 + x/2$

21. Efectuar $(6x^4 - 5x^2) : (x - 1) =$

    Solución: $Q = 6x^3 + 6x^2 + x + 1, R = 1$

22. Efectuar

    $(8x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 5) : (4x^2 - x) =$

    Solución: $Q = 2x^2 + x - 1/2, R = x/2 + 5$

23. Hallar las raíces de

    $f(x) = x^3 - 12x^2 + 7x$

    Solución: $0, 6 \pm \sqrt{29}$

24. Hallar las raíces de

    $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

    Solución: $\pm 1$, dobles

25. Hallar las raíces de

    $f(x) = 3x^3 - 10x - 51$

    Solución: 3

26. Hallar las raíces de

    $f(x) = 5x^3 - 37x^2 + 64x - 20$

    Solución: $2, 5, 1/5$

27. Hallar las raíces de

    $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$

    Solución: $2, 3, -1$ doble

28. Hallar las raíces de

    $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x$

    Solución: $0,\ 2$

29. Hallar las raíces y descomponer

    $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

    Solución: $2, -1, 3$

30. Hallar las raíces y descomponer

    $f(x) = x^4 - x$

    Solución: $x(x-1)(x^2+x+1)$

31. Descomponer $f(x) = x^5 - 4x$

    Solución: $x(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

32. Descomponer $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$

    Solución: $x[x-(1-\sqrt{2})][x-(1+\sqrt{2})]$

33. Descomponer $f(x) = 2x^5 - 18x$

    Solución: $2x(x^2+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

34. Descomponer

    $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$

    Solución: $x(x-1)(x-3)(x+2)$

35. Descomponer

    $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

    Solución: $(x-2)(x-3)(x-4)$

36. Descomponer $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$

    Solución: $2(x-1)^2(x+1)^2$

37. Hallar las raíces y descomponer

    $f(x) = 2x^4 - 4x^2$

    Solución: $2x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

38. Despejar la $x$ en: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{x}{g}}$

    Solución: $x = g\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2$

39. Representar gráficamente

    $3x - y = 2$

40. Representar gráficamente

    $4x - 5y - 24 = 0$

41. Representar gráficamente

    $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 16$

42. Representar gráficamente

    $y = -x^2 - 5x - 6$

43. Representar gráficamente

    $y = (x-3)(1+x)$

44. Representar gráficamente

    $y = (x-3)(5-x)$

45. Representar gráficamente

    $y = 4 + x^2$

46. Representar gráficamente

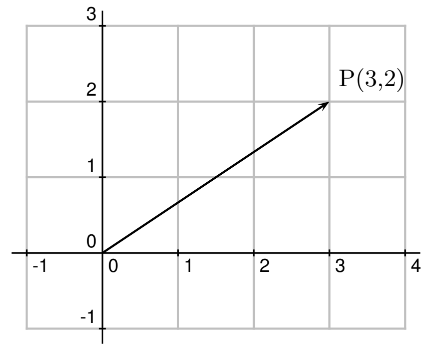
    $$y = \begin{cases} x+1 & para \quad x < 2 \\ -x+2 & para \quad x \geq 2 \end{cases}$$

47. Representar gráficamente

    $$y = \begin{cases} 2x+1 & para \quad x \leq -2 \\ x^2+4x+4 & para \quad x > -2 \end{cases}$$

# 5 VECTORES EN EL PLANO. TRIGONOMETRIA

## 5.1 Espacio vectorial de los vectores libres del plano.

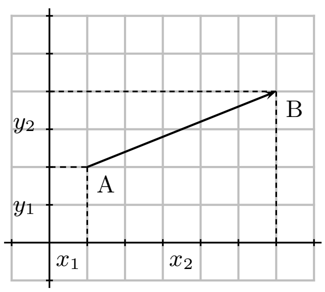


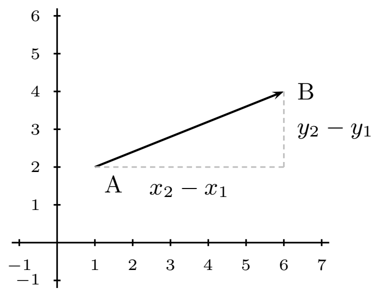

Consideremos $R^2$ conjunto de pares ordenados de números reales por ejemplo (3,2), se les llama vectores, en general representaremos estos elementos por:

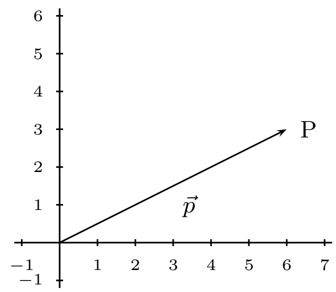
$$\vec{a} = (a_1, a_2), \text{ con } a_i \in R$$

Se representan en el plano dotado de un sistema de coordenadas $OXY$.

Dado un par de puntos $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ queda determinado un vector $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, es decir las coordenadas del vector son las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen.

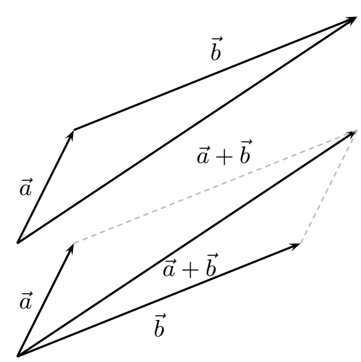



En particular dado un punto $P(x_0, y_0)$, se llama vector de posición del punto $P$ al vector $\vec{OP} = (x_0, y_0)$, se representa por la misma letra del punto minúscula $\vec{p}$.

## 5.2 Operaciones con vectores




**Suma de vectores:** se suman componente a componente, dados: $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$,

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Gráficamente: diagonal del paralelogramo o uno a continuación del otro

**Propiedades de la suma:**

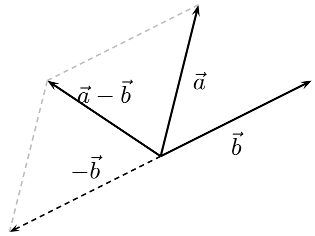
asociativa: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

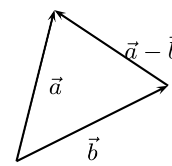
conmutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

elemento neutro: (vector nulo) $\vec{0} = (0, 0)$

elemento simétrico (vector opuesto): $-\vec{a} = (-a_1, -a_2)$ con $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ de $R^2$

Para restar dos vectores:
a) Se suma el opuesto
b) Otra diagonal del paralelogramo

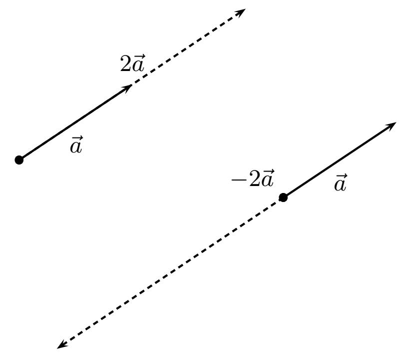



**Producto de un escalar por un vector:** se multiplica cada componente sean: $\alpha \in R, \vec{a} = (a_1, a_2)$

$$\alpha.\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2)$$

Gráficamente: se lleva el vector $\vec{a}$ $''\alpha''$ veces, se obtiene un vector de igual dirección, con el mismo sentido si $\alpha$ es positivo y sentido contrario si $\alpha$ es negativo.




**Propiedades del producto de un escalar por un vector:**

pseudoasociativa $(\alpha.\beta).\vec{a} = \alpha.(\beta.\vec{a})$

producto por la unidad $1.\vec{a} = \vec{a}$

distributiva respecto de la suma de escalares $(\alpha+\beta).\vec{a} = \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{a}$

distributiva respecto de la suma de vectores $\alpha.(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha.\vec{a} + \alpha.\vec{b}$

con $\vec{a}, \vec{b},$ de $R^2$ y con $\alpha, \beta,$ de $R$.

El conjunto $R^2$ con la suma, el producto por escalar y las propiedades que verifican tiene estructura de espacio vectorial, abreviadamente: $(R^2, +, .R)$ e. v.

**Observaciones**

1. Dos vectores tienen **igual dirección** cuando uno de ellos es igual al otro multiplicado por un número. Esto se traduce en que sus coordenadas son **proporcionales**:
   $\vec{v} = (2,-4), \vec{w} = (-3,6), \vec{w} = \frac{-3}{2}\vec{v}, \quad \frac{2}{-3} = \frac{-4}{6}$
2. **Combinación lineal** de unos vectores dados es toda suma de esos vectores multiplicados por escalares.

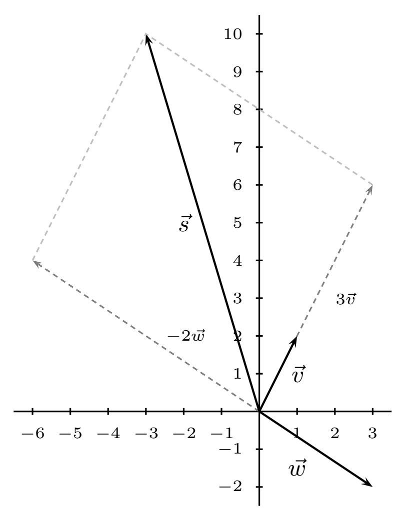
   **Ejemplo:** Comprobar si el vector $\vec{s} = (-3,10)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (1,2), \vec{w} = (3,-2)$

   $\vec{s} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

   $(-3,10) = \alpha(1,2) + \beta(3,-2)$ separando coordenadas

   $\begin{cases} -3 = \alpha + 3\beta \\ 10 = 2\alpha - 2\beta \end{cases} \qquad \beta = -2; \alpha = 3$ luego

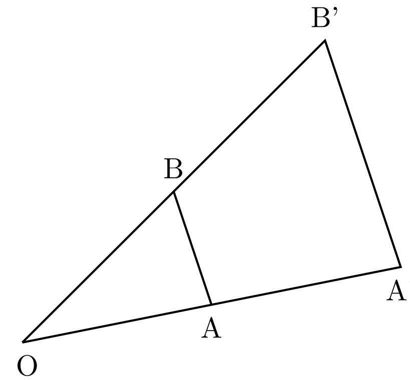
   $$\vec{s} = 3\vec{v} - 2\vec{w}$$



3. Dos vectores del espacio vectorial $R^2$ se dice que forman **base** cuando cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de ellos. Para que dos vectores formen base basta que sean independientes, es decir, que tengan distinta dirección o lo que es igual que sus coordenadas no sean proporcionales.

## 5.3 Teorema de Thales

En dos triángulos semejantes los lados correspondientes son proporcionales




$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

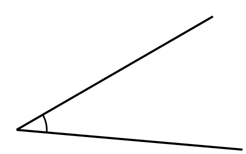
Demostración
Por la homotecia de la figura:
Como $\vec{OA'} = k\vec{OA}, \quad \vec{OB'} = k\vec{OB}$ basta considerar que
$\vec{A'B'} = \vec{OB'} - \vec{OA'} = k[\vec{OB} - \vec{OA}] = k\vec{AB}$

# TRIGONOMETRIA

La trigonometría sirve para hallar distancias y ángulos a partir de otros ángulos y distancias conocidas.

## 5.4 Angulos. Medida de ángulos

Angulo es la sección de plano limitada por dos semirectas de origen común.
Arco circular es la porción de circunferencia limitada por dos puntos.
La medida de un ángulo se hace a partir del arco de circunferencia, con centro en el vértice, limitado por dos lados. Para medir arcos se emplean las medidas siguientes:



**Grado sexagesimal:** Dos diámetros perpendiculares determinan en la circunferencia cuatro arcos iguales llamados cuadrantes. Los ángulos correspondientes se llaman rectos. Por definición se dice que un ángulo recto mide $90^0$.

1 ángulo recto $= 90^0$
1 grado $= 60'$
1 minuto $= 60''$

Ejemplo de suma de ángulos: $80^0 15' 16'' + 25^0 19' 50'' = 105^0 34' 66'' = 105^0 35' 6''$
Ejemplo de resta de ángulos: $189^0 15' 38'' - 90^0 34' 20''$ preparamos para que se puedan restar los minutos y los segundos: $\begin{array}{r} 188^0 75' 38'' \\ -90^0 34' 20'' \\ \hline 98^0 41' 18'' \end{array}$

**Radián:** En una circunferencia de radio 1 el arco de longitud 1 se llama radián.
La circunferencia entera mide en radianes $2\pi$.
Media circunferencia mide en radianes $\pi$.

**Paso de grados a radianes:** $\begin{matrix} 180^0 - \pi \\ 30^0 - x \end{matrix}$ $\quad x = \dfrac{30\pi}{180} = \dfrac{\pi}{6}, \quad 30^0 = \dfrac{\pi}{6}$

**Medida relativa de ángulos:** Llamaremos sentido positivo de medida de ángulos al contrario de las agujas del reloj y negativo al otro.

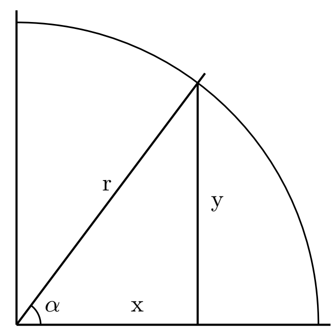
**Arco generalizado:** Hablaremos de arcos mayores o menores de una circunferencia apoyándonos en la idea de giro, así un arco de $800^0$ es dar dos vueltas completas en sentido positivo y $80^0$ más.

Arco reducido al primer giro de un arco generalizado es el arco menor que una vuelta pero con los mismos extremos:

arco reducido de $800^0 = 80^0$
arco reducido de $-800^0 = -80^0$ o también: $280^0$

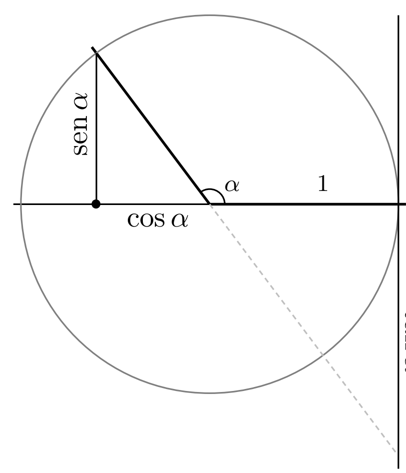
El arco reducido al primer giro de $-490^0$ es igual a $-130^0$ o $230^0$. En la práctica no se acostumbra a usar arcos reducidos negativos de número mayor que 90.

## 5.5 Razones trigonométricas




Dado un ángulo, si lo situamos en unos ejes coordenados como se indica en la figura y pintamos una circunferencia cualquiera con centro en el origen, a partir de las coordenadas del punto donde el segundo lado del ángulo corta a la circunferencia definimos:

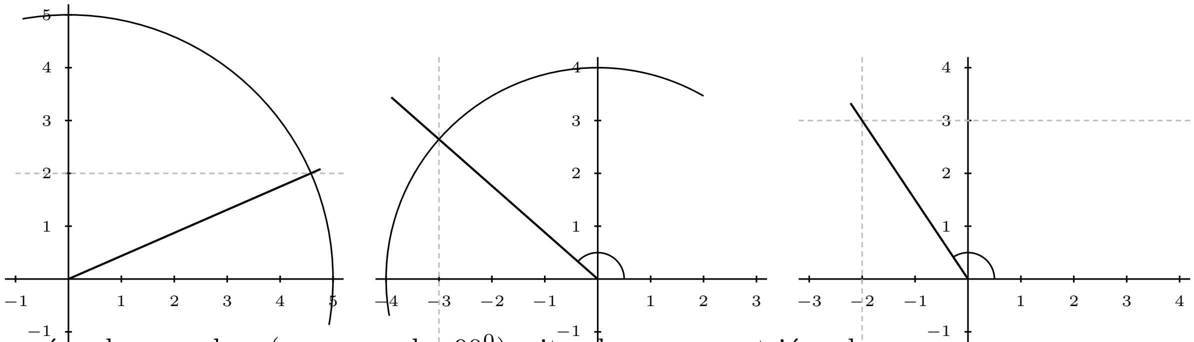
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r},\ \cos\alpha = \frac{x}{r},\ \tan\alpha = \frac{y}{x}$$



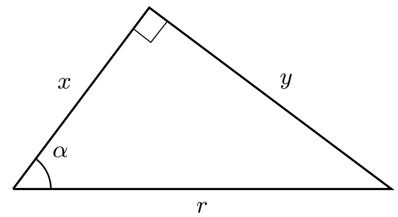

Si astutamente tomamos la circunferencia con radio 1, queda que el seno es la ordenada $y$ y el coseno la abcisa $x$ del punto donde el segundo lado del ángulo corta a la circunferencia .

La tangente queda en la "recta de tangentes".

**Ejemplo** Construir los ángulos menores de $180^0$ que tienen respectivamente: a) $\operatorname{sen} A = 2/5$; b) $\cos B = -3/4$; c) $\tan C = -3/2$



Para ángulos agudos (menores de $90^0$) situados en un triángulo rectángulo, se tienen:




$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

## 5.6 Razones trigonométricas recíprocas

Son tres: cosecante, secante y cotangente.

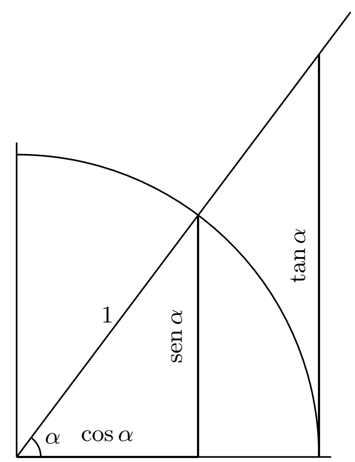
$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

## 5.7 Razones de ángulos notables

| Radianes | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grados | $0^0$ | $90^0$ | $180^0$ | $270^0$ | $30^0$ | $60^0$ | $45^0$ |
| Seno | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| Coseno | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| Tangente | $0$ | $\pm\infty$ | $0$ | $\pm\infty$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ | $1$ |

nota: es frecuente escribir $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

## 5.8 Relaciones fundamentales




A partir de la figura es inmediato

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

dividiendo la igualdad anterior por $\cos^2\alpha$:
$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad \tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2}$ es decir:

$$\boxed{1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

**Ejemplos:**

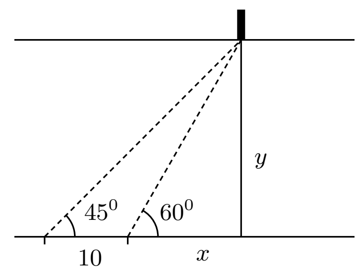
1. Sabiendo que $\alpha$ no está en el $2^0$ cuadrante y que $\cos\alpha = -1/3$, hallar las restantes razones trigonométricas de $\alpha$ .

   $\alpha$ es del $3^{er}$ cuadrante

   $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \operatorname{sen}^2\alpha + 1/9 = 1; \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$

   como $\alpha$ es del $3^{er}$ cuadrante tomamos el signo menos $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$, entonces $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = +\sqrt{8}$

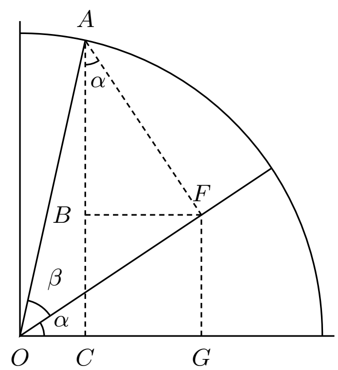
2. Hallar la anchura del río con los datos del dibujo.
   (Es el llamado "método de la doble observación")

   $\left\{\begin{array}{l} \tan 45^0 = \frac{y}{10+x} \\ \tan 60^0 = \frac{y}{x} \end{array}\right. ; \left\{\begin{array}{l} 1 = \frac{y}{10+x} \\ \sqrt{3} = \frac{y}{x} \end{array}\right. \quad x = \dfrac{y}{\sqrt{3}},$

   sustituyendo queda $10 + \frac{y}{\sqrt{3}} = y, \quad y = \frac{10}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 23'6m$

## 5.9 Razones trigonométricas del ángulo suma de dos ángulos




Tenemos las siguientes fórmulas:

$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta}$

$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}$

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}}$$

Demostración:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \bar{AC} = \bar{BC} + \bar{AB} = \left\{\begin{array}{l} \bar{AB} = \cos\alpha.\bar{AF} = \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta \\ \bar{BC} = \bar{FG} = \operatorname{sen}\alpha.\bar{OF} = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta \end{array}\right\}$$

$= \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$

$$\cos(\alpha+\beta) = \bar{OC} = \bar{OG} - \bar{CG} = \left\{\begin{array}{l} \bar{OG} = \cos\alpha.\bar{OF} = \cos\alpha.\cos\beta \\ \bar{CG} = \bar{BF} = \operatorname{sen}\alpha.\bar{AF} = \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta \end{array}\right\}$$

$= \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta} = \begin{array}{l}\text{dividiendo numerador y}\\ \text{denominador}\\ \text{por } \cos\alpha.\cos\beta\end{array} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} + \frac{\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} - \frac{\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}} =$$

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$$

## 5.10 Razones trigonométricas del ángulo resta de dos ángulos

Como podemos convertir la resta en suma: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ resulta:

$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta}$

$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}$

$\boxed{\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}}$

### 5.11 Razones trigonométricas del ángulo doble

Como podemos poner $2.\alpha = \alpha + \alpha$ resulta a partir de las fórmulas del ángulo suma:

$\boxed{\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha . \cos \alpha}$

$\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}$

$\boxed{\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}}$

**Ejemplo** Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = 1/3$ con $\alpha$ en el $2^0$ cuadrante y que $\cos \beta = -2/5$ con $\beta$ en el $3^{er}$ cuadrante. Hallar $\tan(\alpha - \beta)$.

Necesitamos las tangentes de $\alpha$ y $\beta$

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \frac{1}{9} + \cos^2 \alpha = 1$, resulta $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$, luego $\tan \alpha = -\frac{1}{\sqrt{8}}$

$1 + \tan^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta}, \quad 1 + \tan^2 \beta = \frac{25}{4}$, luego $\tan \beta = \frac{\sqrt{21}}{2}$

Por tanto sustituyendo en $\tan(\alpha - \beta)$, queda: $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{21}}{2}}{1 + (-\frac{1}{\sqrt{8}})\frac{\sqrt{21}}{2}} = \dfrac{-2 - \sqrt{21}.\sqrt{8}}{2.\sqrt{8} - \sqrt{21}}$

### 5.12 Producto Escalar

Dados dos vectores $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ de $R^2$ definimos producto escalar de esos dos vectores:

$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$ el resultado es pues un número: la suma de los productos de sus coordenadas.

Propiedades:

1) Distributiva $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

2) Pseudoasociativa $(\alpha\vec{a}).\vec{b} = \alpha(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(\alpha\vec{b})$

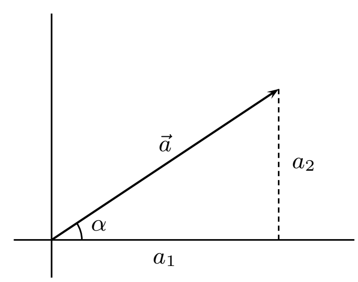
3) Conmutativa $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

4) $\vec{a}.\vec{a} \geq 0$

5) $\vec{a}.\vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ para $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^2; \alpha \in R$

$R^2$ espacio vectorial con el producto escalar así definido se llama plano vectorial euclídeo.

### 5.13 Módulo de un vector




Dado un vector $\vec{a} = (a_1, a_2) \in R^2$ módulo de $\vec{a}$ es

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ; es la longitud del vector:

$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$

Observemos que $a_1 = |\vec{a}| \cos \alpha, a_2 = |a| \operatorname{sen} \alpha$

Un vector se dice **unitario** cuando su módulo es 1

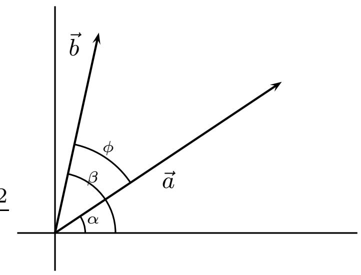
$|\alpha\vec{a}| = |\alpha|.|\vec{a}|$ para todo $\vec{a} \in R^2, \alpha \in R$

nota: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ está bien, $\vec{a} = \sqrt{\vec{a}^2}$ está mal, $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ está bien.

## 5.14 Angulo de dos vectores

Dados $\vec{a}, \vec{b}$ dos vectores de $R^2$ no nulos se llama ángulo de esos dos vectores al ángulo $\phi$ formado por dos semirrectas que los contienen, se verifica:

$$\boxed{\cos\phi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$




Demostración
$\cos\phi = \cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$

$$\begin{cases} \cos\alpha = a_1/|\vec{a}|; \operatorname{sen}\alpha = a_2/|\vec{a}| \\ \cos\beta = b_1/|\vec{b}|; \operatorname{sen}\beta = b_2/|\vec{b}| \end{cases} \text{,sustituyendo: } \cos\phi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

**Ejemplo** Hallar el ángulo que forman $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (-4, 1)$

$$\cos\phi = \frac{1.(-4) + 2.1}{\sqrt{1+4}.\sqrt{16+1}} = \frac{-2}{\sqrt{85}} = -0'21; ar\cos(-0'21) = 102'12^0; \quad \text{ángulo}(\vec{a}, \vec{b}) = 102'12^0$$

**Consecuencias**

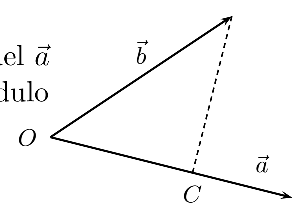
1. **Definición clásica de producto escalar** $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\phi$

   **Ejemplo** Dados dos vectores $\vec{x}, \vec{y}$ tales que sus módulos valen 3 y forman un ángulo de $30^0$, hallar $\vec{a}.\vec{b}$ siendo $\vec{a} = 3\vec{x} - 2\vec{y}, \vec{b} = 5\vec{x} + 3\vec{y}$.

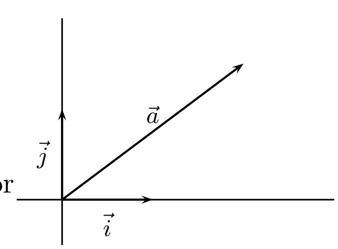
   $\vec{a}.\vec{b} = (3\vec{x} - 2\vec{y})(5\vec{x} + 3\vec{y}) = 15\vec{x}^2 - 6\vec{y}^2 - \vec{x}.\vec{y} = 15|\vec{x}|^2 - 6|\vec{y}|^2 - |\vec{x}|.|\vec{y}|\cos 30^0 = 15.9 - 6.9 - 9.\cos 30^0 = 81 - \frac{9\sqrt{3}}{2}$

2. Dos vectores son **ortogonales** (perpendiculares) si y solo si su producto escalar es 0.

3. Como $|\vec{b}|\cos\phi$ es la proyección $\bar{OC}$ del vector $\vec{b}$ sobre la dirección del $\vec{a}$ podemos decir que el producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos multiplicado por la proyección del otro sobre él.
   en efecto: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$; y se tiene: $\cos\phi = \frac{\bar{OC}}{|\vec{b}|}$




4. **Base ortonormal** es toda base formada por vectores unitarios ortogonales.
   Por ejemplo la base canónica formada por
   $\vec{i} = (1, 0), \vec{j} = (0, 1)$
   Entonces dado un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ se puede escribir:
   $\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$




5. Dado un vector $\vec{v}$, si lo dividimos por su módulo obtenemos un vector unitario de igual dirección y sentido: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

6. Se cumplen las siguientes desigualdades: dados dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$ de $R^2$

   1) $|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ desigualdad de Schwarz

   2) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ desigualdad de Minkowski

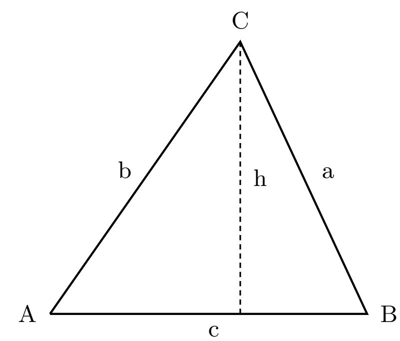
Demostración 1) $|\vec{a}.\vec{b}| = ||\vec{a}||\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})| \leq \{|coseno| \leq 1\} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

2) Como $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ son números positivos, podemos comparar sus cuadrados, teniendo en cuenta que $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^2}$ o sea $|\vec{v}|^2 = (\sqrt{\vec{v}^2})^2 = \vec{v}^2$; resulta:

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$

# Resolución de triángulos oblicuángulos

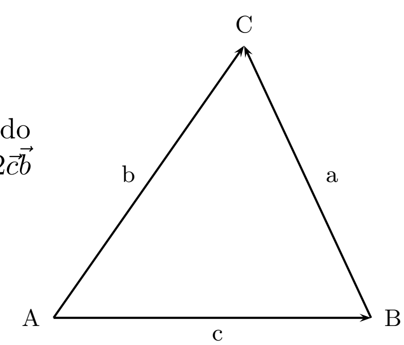
## 5.15 Teorema del seno




A partir de la figura $h = a.\operatorname{sen} B$
$h = b.\operatorname{sen} A$ luego $a.\operatorname{sen} B = b.\operatorname{sen} A$
queda $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$
tomando otra altura se verificaría para c y C resulta:

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}}$$

## 5.16 Teorema del coseno




A partir de la figura se tiene la igualdad vectorial $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$ igualando los módulos $|\vec{a}| = |\vec{c}-\vec{b}|, |\vec{a}|^2 = |\vec{c}-\vec{b}|^2 = (\vec{c}-\vec{b})(\vec{c}-\vec{b}) = \vec{c}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{c}\vec{b}$ llamando por comodidad $|\vec{a}| = a; |\vec{b}| = b; |\vec{c}| = c$, resulta entonces:

$$\boxed{a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos A}$$

y análogamente $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

## 5.17 Resolución de triángulos oblicuángulos

Consiste en, dados algunos ángulos y lados, hallar los restantes. Se aplican las fórmulas anteriores teniendo en cuenta:

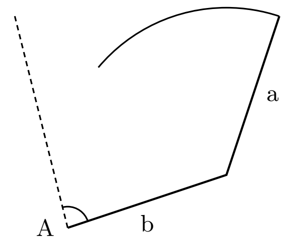
1) Los ángulos suman $180^0$

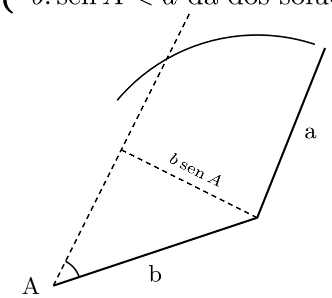
2) Un lado ha de ser menor que la suma de los otros dos.

3) En todos los casos existe solución y es única excepto en el caso en que dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos: el problema puede tener dos, una o ninguna solución:

datos $a, b, A$

$$A \geq 90^0 \begin{cases} a > b \text{ da una solución} \\ a \leq b \text{ ninguna solución *} \end{cases} \qquad A < 90^0 \begin{cases} a \geq b \text{ da una solución} \\ a < b \begin{cases} b.\operatorname{sen} A > a \text{ ninguna solución} \\ b.\operatorname{sen} A = a \text{ da una solución} \\ b.\operatorname{sen} A < a \text{ da dos soluciones **} \end{cases} \end{cases}$$

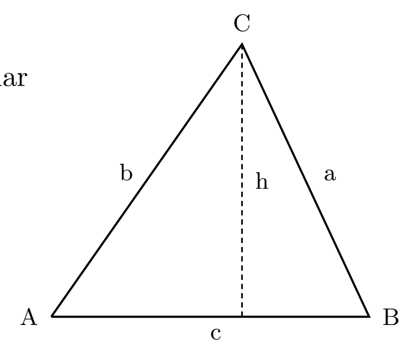



* pues a mayor lado se ha de oponer mayor ángulo

** se aplica el teorema del seno y se toman dos soluciones una menor que $90^0$ y otra mayor que $90^0$

**Ejemplos**




1. Resolver el triángulo con los datos: $a = 40, B = 45^0, C = 75^0$. Hallar también el área.

   $A = 180 - (B + C) = 60^0$

   $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}; b = \dfrac{40\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 32'6$

   $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}; c \approx \dfrac{40.0'96}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 44'6$

   $S = \dfrac{c.h}{2} = \dfrac{c.a.\operatorname{sen} B}{2} \approx 630'94u^2$

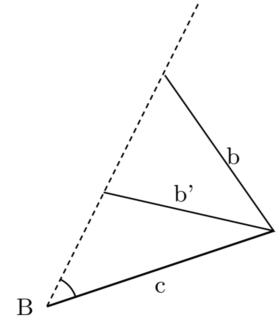
2. Id. a = 3, b = 5, c = 9

   imposible no es triángulo (al aplicar el teorema del coseno resulta un valor de $\cos A$ mayor que uno)

3. Hallar A sabiendo que a = 3, b = 5, c = 6

   $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A,$

   $9 = 25 + 36 - 60. \cos A, \quad \cos A = \frac{52}{60}; \quad A \approx 29'92^0$




4. Hallar C sabiendo que b = 9, c = 10, B = $40^0$

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C};$$

$$\operatorname{sen} C \approx \frac{10.0'64}{9} \approx 0'71, \quad \begin{cases} C \approx 45'57^0 \\ C' \approx 180 - 45'47^0 = 134'43^0 \end{cases}$$

5. Hallar A sabiendo que a= 8, b = 3, B = $30^0$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}; \quad \operatorname{sen} A = \frac{a.\operatorname{sen} B}{b} = \frac{8.0'5}{3} = \frac{4}{3}, \text{ no hay solución}$$

6. Hallar el ángulo B en le triángulo de vértices $A(3,2), B(4,5), C(-1,3)$.

Se halla por vectores:

$\vec{BA} = (3-4, 2-5) = (-1,-3)$

$\vec{BC} = (-1-4, 3-5) = (-5,-2)$

$$\cos B = \frac{\vec{BC}.\vec{BA}}{|\vec{BC}|.|\vec{BA}|} = \frac{(-1)(-5)+(-3)(-2)}{\sqrt{1+9}.\sqrt{25+4}} = \frac{11}{\sqrt{290}} \approx 0'6459; ar\cos(0'6459) \approx 49'76^0$$

$$B \approx 49'76^0$$

## Problemas de vectores en el plano y Trigonometría

1. Calcular t para que los vectores $\vec{a}$ = (3,2), $\vec{b}$ = (1,t) sean paralelos.

   Solución: $t = 2/3$

2. Hallar las coordenadas del punto D para que el polígono ABCD sea un paralelogramo, sabiendo que A(3,1), B(4,7), C(6,2).

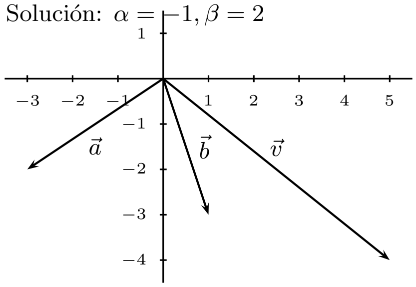
   Solución: $\vec{AB} = \vec{DC}, D(5,-4)$

3. Dado el vector de coordenadas (3,2) hallar analítica y gráficamente su expresión en la base (2,1), (1,-2).

   Solución: $\alpha = 8/5, \beta = -1/5$

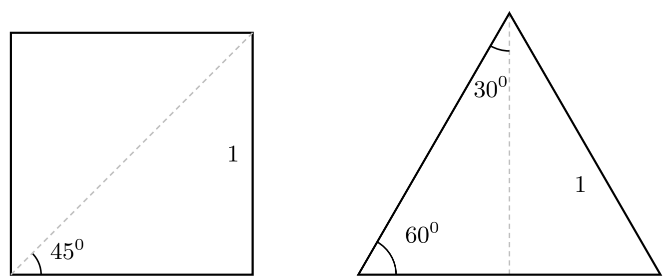
4. Dado el vector $\vec{v}$ hallar analítica y gráficamente su expresión en la base formada por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ .

   Solución: $\alpha = -1, \beta = 2$




5. Construir los ángulos correspondientes: a) $\operatorname{sen} A = 3/4$; b) $\cos B = 6/7$; c) $\tan C = 3$

6. A partir de la figura hallar $\operatorname{sen}, \cos, \tan$ de los siguientes ángulos: a) $45^0$, b) $30^0$, c) $60^0$




7. Hallar sin tablas, todas las razones trigonométricas: a) de $450^0$; b) $4\pi/3$; c) $3\pi/4$

8. Hallar los ángulos entre $0^0$ y $360^0$ que tienen: a) seno = $1/\sqrt{2}$ ; b) tangente = $\sqrt{3}$ ; c) coseno = $\sqrt{3}/2$

   Solución: a) $45^0, 135^0$, b) $60^0, 240^0$, c) $30^0, 330^0$

9. Hallar el valor de

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} + \tan\frac{-\pi}{4} - \tan\frac{4\pi}{3}}{\cos\frac{7\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{-\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{2}}$$

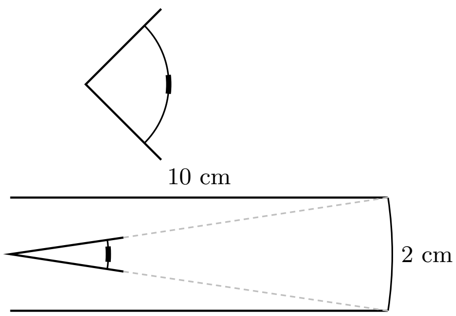
   Solución: $-2\sqrt{2} - \sqrt{6} + 1$

10. Sabiendo que $\tan A = -2/3$ y que $A \in [-\pi/2, \pi/2]$, hallar las demás razones trigonométricas.

    Solución: $\operatorname{sen} A = -2/\sqrt{13}, \cos A = 3/\sqrt{13}, \tan A = -2/3$

11. La amplitud de visión del ojo es de $89^0$. ¿ Cuál es la amplitud de miras del que ve la vida por un canuto de 2 cm de diámetro y 10 cm de largo?.

    Solución: $11'4^0$




12. Desde un cierto lugar del suelo se ve el punto más alto del pararrayos de un edificio formando un ángulo de $45^0$ con la horizontal. Si nos acercamos 4 m el ángulo pasa a ser de $60^0$. Calcular la altura del extremo del pararrayos.

    Solución: 9'46 m

13. Hallar las razones trigonométricas de a) $75^0$; b) $105^0$; c) $-15^0$.

    Solución: a) $\operatorname{sen} 75^0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \cos 75^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \tan 75^0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$, b) $\operatorname{sen} 105^0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \cos 105^0 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \tan 105^0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$, c) $\operatorname{sen}(-15^0) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \cos(-15^0) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \tan(-15^0) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

14. Calcular
$$\frac{\operatorname{sen}(\pi/3 - \pi/4) + \cos(3\pi/2 - \pi/3)}{\tan(\pi/4 + \pi/3)}$$

    Solución: $\frac{2\sqrt{3}-4+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}$

15. Sabiendo que $\alpha$ y $\beta$ son ángulos menores que $\pi/2$ y que $\tan\alpha = 4$ y $\tan\beta = 8$. Calcular $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ .

    Solución: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{12}{\sqrt{1105}}, \cos(\alpha-\beta) = \frac{33}{\sqrt{1105}}$

16. Sean $\vec{a}, \vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 7$, $\vec{a}.\vec{b} = 5$. Calcular $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})$.

    Solución: -54

17. Sea $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ una base de $V^2$ tal que $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 3$ y $\cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = 0$. Siendo $\vec{a} = 3\vec{e_1} - 6\vec{e_2}$, $\vec{b} = 8\vec{e_1} - \vec{e_2}$. Calcular $\vec{a}^2 - \vec{a}.\vec{b}$.

    Solución: 135

18. Escribir tres vectores ortogonales al vector de coordenadas $(8, -7)$. ¿Cómo son estos tres vectores entre sí?. ¿Qué relación tienen sus coordenadas?.

19. Sea $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ una base ortonormal. Demostrar que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definidos por $\vec{a} = \vec{u_1}/\sqrt{10} + 3\vec{u_2}/\sqrt{10}$, $\vec{b} = -3\vec{u_1}/\sqrt{10} + \vec{u_2}/\sqrt{10}$, constituyen una base ortonormal.

20. Sea $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ una base ortonormal de $V^2$. Siendo $\vec{a} = 3\vec{u_1} + 4\vec{u_2}$, $\vec{b} = 2\vec{u_1} - \vec{u_2}$. Calcular $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

    Solución: $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = \sqrt{5}, \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5\sqrt{5}}$

21. Sea $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ una base tal que $|\vec{v_1}| = |\vec{v_2}| = 2$ y $\vec{v_1}.\vec{v_2} = 3$. Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definidos por $\vec{a} = \vec{v_1} - 3\vec{v_2}$, $\vec{b} = -2\vec{v_1} + \vec{u_2}$.

    Solución: $85'677^0$

22. Resolver el triángulo y hallar el área, b = 8, c = 5, A = $60^0$.

    Solución: $a = 7, S = 10\sqrt{3}$ u$^2$

(los siguientes son problemas de resolución de triángulos)

23. Resolver el triángulo, a = 17, B = $48^0$, C = $52^0$.

    Solución: $b = 12'82, c = 13'6$

24. Resolver el triángulo, a = 6, b = 8, A = $40^0$.

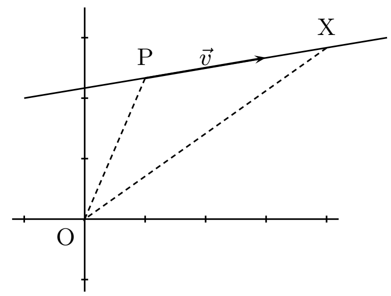
    Solución: $B = 58'98^0, C = 81'01, c = 9'21$; $B' = 121'01^0, C' = 18'9^0, c' = 3'04$

25. Hallar el ángulo A en el triángulo de vértices A(3,1), B(2,4), C(-1,-2).

    Solución: $A = ar\cos\frac{-5}{\sqrt{250}} = 108'4^0$

# 6 GEOMETRIA

## 6.1 Ecuaciones de la recta




Sea la recta que pasa por el punto P y tiene la dirección del vector $\vec{v}$.
Sea X un punto cualquiera de la recta.
Se verifica $\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}$, como $\vec{PX}$ tiene igual dirección que $\vec{v}$ se tiene que, $\vec{PX} = t\vec{v}$ por tanto $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}, t \in R$
Pasando a coordenadas si $P(x_0, y_0), \vec{v} = (v_1, v_2)$ y suponemos que $X(x, y)$ se tiene:
$\boxed{r : (x, y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2), t \in R}$ **ec. vectorial de la recta**

**Ejemplo** La recta que pasa por $P(1, -3)$, y tiene vector dirección $\vec{v} = (2, 1)$ es:
$(x, y) = (1, -3) + t(2, 1), t \in R$

Separando coordenadas: $\boxed{r : \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}, t \in R}$ **ecuaciones paramétricas de la recta**

**Ejemplo** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \end{cases}, t \in R$

Eliminando t entre las dos ecuaciones (despejando t) se tiene $\boxed{r : \dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2}}$, **ecuación continua de la recta**

**Ejemplo** $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+2}{-2}$ (se admite la notación simbólica "partido por 0"en este contexto)

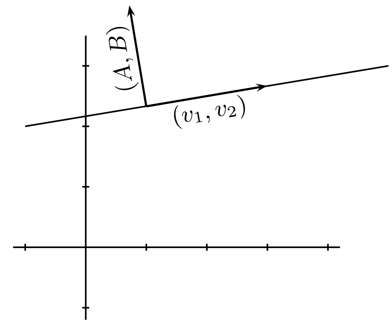
Quitando denominadores llegamos a expresiones del tipo $v_2x - v_1y + C = 0$ es decir es de la forma:
$\boxed{r : Ax + By + C = 0}$, **ecuación general de la recta**. Se caracteriza por que el segundo miembro es 0 Despejando $y$: $y = \dfrac{v_2}{v_1}x + n$ es decir es de la forma: $\boxed{y = mx + n}$ , **ecuación explícita**. Se caracteriza por estar despejada la $y$.

**Ejemplo** La recta $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2}$, se puede expresar $-2(x-1) = 3(y+2); y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}$ explícita; o también $2x + 3y + 4 = 0$ general

## 6.2 Observaciones

1. En las ecuaciones en forma vectorial, paramétricas, y continua de la recta aparecen directamente un punto y un vector dirección de la recta.

   **Ejemplo** $x = 1$ ec. general $\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = y \end{cases}$ paramétricas; punto (1,0); vector dirección (0,1)



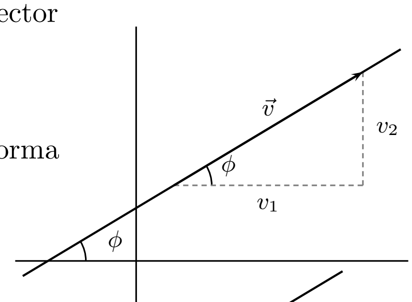

2. Con x e y en el mismo miembro, por ejemplo en la ecuación general $Ax + By + C = 0$, teníamos que $A = v_2, B = -v_1$, entonces si hacemos el producto escalar entre los vectores $(v_1, v_2)$ y $(A, B)$ resulta $(v_1, v_2).(A, B) = (v_1, v_2).(v_2, -v_1) = 0$ luego $(v1, v2) \perp (A, B)$ por tanto $(A, B)$ es **vector ortogonal** a la recta y podemos decir:
   con x e y en el mismo miembro, para obtener un vector dirección de la recta basta tomar esos coeficientes, intercambiarlos y cambiar el signo a uno de ellos.

   **Ejemplos**

   (a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta $2x + 3y - 2 = 0$
   necesitamos un punto y un vector dirección;
   punto: para $y = 0$ resulta $x = 1$; punto $(1, 0)$
   vector ort.: $(2, 3) \Longrightarrow (3, -2)$; vector dir.: $(3, -2)$
   $$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2t \end{cases}$$

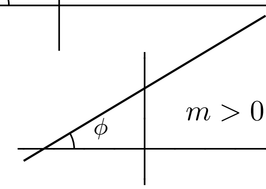
   (b) Hallar la ecuación de la recta paralela a $2x - 3y = 7$ que pasa por el punto $(0, 4)$.
   Si es paralela sirve el mismo vector ortogonal por tanto los coeficientes de x, y pueden ser los mismos $2x - 3y + C = 0$
   Haciendo que pase por el punto $-3.4 + C = 0; C = 12$, luego la recta buscada es $2x - 3y + 12 = 0$.

3. En la ecuación explícita $y = mx + n$ por lo anterior $(1, m)$ es vector dirección
   $$m = \frac{v_2}{v_1} = \tan\phi$$



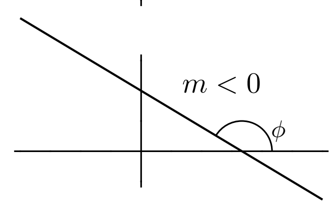

   **m se llama pendiente** de la recta, es la tangente del ángulo que forma la recta con las "x positivas".

   m es el coeficiente de x cuando y está despejada
   n es la ordenada en el origen.




   Por tanto según que la pendiente sea positiva o negativa la recta es creciente o decreciente.

   Por otro lado se tiene que $n$ es la ordenada en el origen.




   La pendiente de dos rectas paralelas son iguales, las pendientes de dos rectas perpendiculares son inversas de distinto signo.

4. Para pasar de las ecuaciones en que aparece punto y vector a las otras basta conseguir lo que la caracteriza por ejemplo en la general que todo esté en el primer miembro

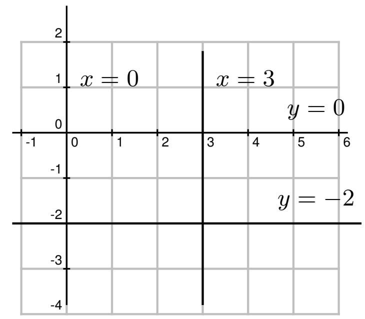
   Para pasar de de la ec general a una ecuación en la que aparece punto y vector se halla punto y vector, ejemplo anterior.

5. Rectas paralelas a los ejes

$x = 3 \quad \begin{cases} \text{punto } (3,0); \\ \text{vector } (0,1) \end{cases}$

$y = -2 \quad \begin{cases} \text{punto } (0,-2); \\ \text{vector } (1,0) \end{cases}$

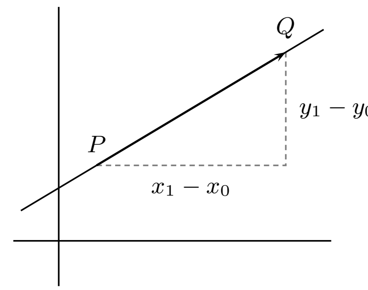
$x = 0 \quad \begin{cases} \text{punto } (0,0); \\ \text{vector } (0,1) \end{cases}$ es el eje de ordenadas.




6. Otras ecuaciones:
**Recta que pasa por dos puntos:** $P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1)$, consideramos el vector $\vec{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ vector dirección, resulta:

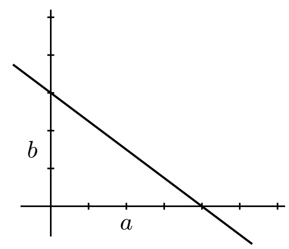
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

despejando $y - y_0$, queda $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), \quad m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$




$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$ **ecuación punto pendiente**

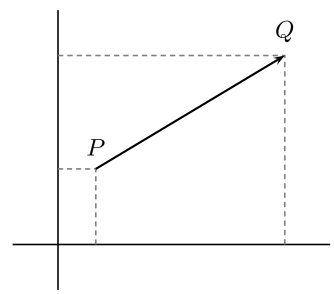
**Ecuación segmentaria:** A partir de la ecuación general $Ax+by+C = 0$ pasando C al segundo miembro $Ax + By = -C$ dejando 1 en el $2^0$ miembro
$\dfrac{Ax}{-C} + \dfrac{By}{-C} = 1, \quad \dfrac{x}{-C/A} + \dfrac{y}{-C/B} = 1$ que es de la forma
$\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$ **ecuación segmentaria**, a es la abcisa en el origen, b es la ordenada en el origen



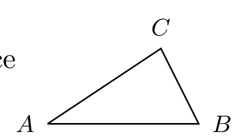

## 6.3 Distancia entre dos puntos

Es el módulo del vector $\vec{PQ}, \quad d(PQ) = |\vec{PQ}|$. Si las coordenadas son $P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1)$

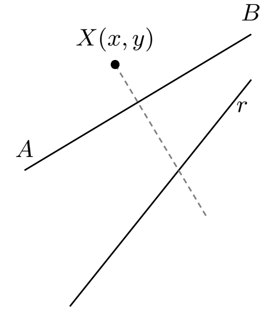
$$\boxed{d(PQ) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}$$




Se verifica:
1) $d(P, Q) = d(Q, P)$
2) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$, desigualdad triangular que se deduce inmediatamente de la desigualdad de Minkowski de vectores pues
$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$




**Ejemplo** nota: mediatriz de un segmento es la recta cuyos puntos equidistan de los extremos del segmento.




Dados los puntos $A(2,3), B(0,2)$ a) Hallar la mediatriz. b) Hallar el punto de la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1}$ que equidista de los puntos dados.

a) Sea $X(x,y)$ un punto de la recta mediatriz, cumple que $d(X,A) = d(X,B)$ se tendrá que: $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$ simplificando: $4x+2y-9=0$ es la mediatriz.

b) Resolviendo $\left\{ \begin{array}{l} 4x+2y-9=0 \\ x+2y-1=0 \end{array} \right.$, queda: $(8/3, -5/6)$

## 6.4 Punto medio de un segmento

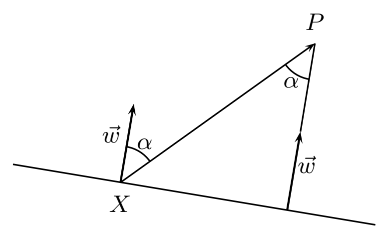
Dados los puntos $P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$ sea $M(x_m,y_m)$ el punto medio se tiene $\vec{PQ} = 2\vec{PM}$ en consecuencia: $\begin{array}{l} x_2-x_1 = 2(x_m-x_1) \\ y_2-y_1 = 2(y_m-y_1) \end{array}$

$\boxed{x_m = \dfrac{x_1+x_2}{2}, \quad y_m = \dfrac{y_1+y_2}{2}}$ Luego el punto medio tiene de coordenadas la semisuma de coordenadas.

## 6.5 Distancia de un punto a una recta

Dados la recta $r: Ax+By+C=0$ y el punto $P(x_0,y_0)$ se tiene:

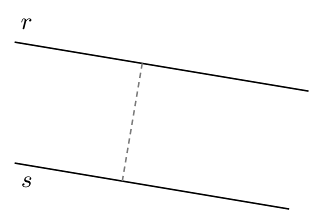
$$\boxed{d(P,r) = \left| \frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \right|}$$




Demostración
Se trata de hacer de dos maneras el producto escalar de $\vec{w} = (A,B)$ ortogonal a r y $\vec{XP} = (x_0-x, y_0-y)$ vector de origen en un punto $X(x,y)$ culquiera de r y extremo $P$:
$\vec{w}.\vec{XP} = A(x_0-x)+B(y_0-y) = Ax_0+By_0-(Ax+By) = Ax_0+By_0+C$, por otro lado:
$\vec{w}.\vec{XP} = |\vec{w}|.|\vec{XP}|.\cos\alpha = |\vec{w}|.$ proyección de $\bar{XP}$ sobre $\vec{w} = \sqrt{A^2+B^2}.d(P,r)$,

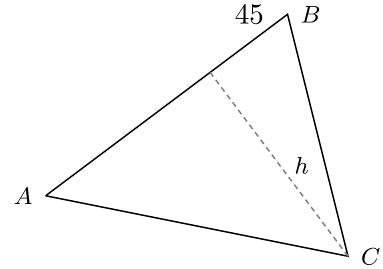
despejando queda la fórmula sin más que tomar valor absoluto pues consideramos que la distancia siempre es positiva.

**Ejemplos**

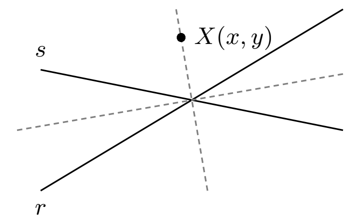



1. Hallar la distancia de la recta $r: x-2y=1$ a la recta $s: -3x+6y-2=0$
   Primero comprobamos la situación relativa de las rectas y vemos que son paralelas.
   Entonces la distancia de las rectas será igual a la distancia de un punto cualquiera de una recta a la otra, obtenemos un punto de la recta r haciendo por ej. $y=0$, resulta $x=1$, punto $P(1,0)$
   $d(r,s) = d(P,s) = \left| \dfrac{-3-2}{\sqrt{(-3)^2+6^2}} \right| = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

2. Hallar la altura del vértice C en el triángulo de vértices $A(0,0), B(6,8), C(6,0)$.
   recta r que contiene al lado $AB$ : $\quad 4x - 3y = 0$
   altura de $C = d(C, r) = \dfrac{24}{5}$



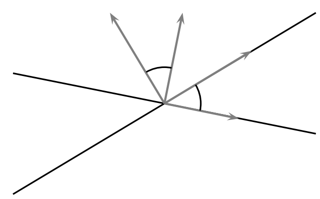

3. Hallar la bisectriz de las rectas $r: 2x - y + 2 = 0, \quad s: x + 3y - 1 = 0$
   La bisectriz de dos rectas es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ellas. Por tanto haremos $d(X, r) = d(X, s)$
   $\dfrac{2x - y + 2}{\sqrt{4+1}} = \pm \dfrac{x + 3y - 1}{\sqrt{1+9}}$
   tomando signo + : $(2\sqrt{2} - 1)x - (\sqrt{2} + 3)y + 2\sqrt{2} + 1 = 0$
   tomando signo − : $(2\sqrt{2} + 1)x + (3 - \sqrt{2})y + 2\sqrt{2} - 1 = 0$




## 6.6 Ángulo de dos rectas

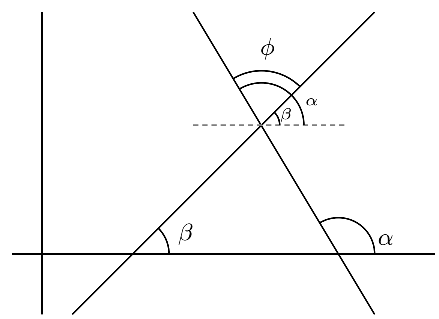
Es el menor de los ángulos que forman.($\leq 90^0$)
1) A partir de dos vectores dirección u ortogonales

**Ejemplo** Hallar el ángulo que forman las rectas
$r: \dfrac{x-1}{2} = y - 3; \quad s: \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y+5}{4}$
los vectores respectivos son $\vec{v} = (2, 1), \vec{w} = (-3, 4)$
$\cos\alpha = \left|\dfrac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}|.|\vec{w}|}\right| = \left|\dfrac{-6+4}{\sqrt{5}.\sqrt{25}}\right| = \dfrac{2}{5\sqrt{5}}$
(se toma valor absoluto porque no sabemos si se trata del ángulo $\alpha$ o de su suplementario)
$\alpha = arc\cos\dfrac{2}{5\sqrt{5}} = 79'69^0$



2) A partir de las pendientes $\phi = \alpha - \beta$
Como $\tan\phi = \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha . \tan\beta}$

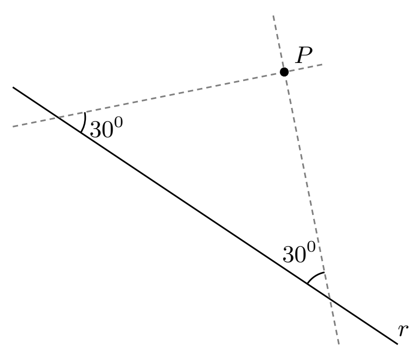
$$\boxed{\tan\phi = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 . m_2}\right|}$$




se toma valor absoluto para obtener el ángulo menor de $90^0$.

**Ejemplo** Hallar la recta que pasa por el punto $(3 - 1)$ y forma un ángulo de $30^0$ con la recta $r: x - 2y + 5 = 0$

Sea m la pendiente de la recta buscada, $m_r = 1/2$, sustituyendo:
$\tan 30^0 = \left|\dfrac{m - 1/2}{1 + m.1/2}\right|; \quad \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{2m-1}{2+m}$
tomando el signo + resulta $y + 1 = 1'51(x - 3)$
tomando el signo − resulta: $y + 1 = -0'06(x - 3)$



## Problemas de Geometría

1. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto (2,-1) y es paralela al recta 2x - 3y = 3.

   Solución: $\left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{array} \right.$

2. Hallar las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por $(3, -1)$ y tiene vector dirección (-2,4). Representarla gráficamente.

3. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto (2,-1) y es perpendicular al recta 2x - 5y = 2.

   Solución: $-5x - 2y + 8 = 0$

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,2), (3,4).

   Solución: $2x - 3y + 6 = 0$

5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,2) y es paralela a la recta $\left\{ \begin{array}{l} 3x + t = 0 \\ 4t + y = 0 \end{array} \right.$

   Solución: $12x - y - 10 = 0$

6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2,-4) y es paralela a la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3}$.

   Solución: $\frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{3}$

7. Una recta es perpendicular a la bisectriz del primer cuadrante y pasa por el punto (3,-1). Escribir sus ecuaciones paramétricas.

   Solución: $\left\{ \begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = -1 - t \end{array} \right.$

8. ¿ Cómo son las pendientes de dos rectas perpendiculares?.

   Solución: inversas cambiadas de signo

9. Si r: Ax + By + C = 0 y s: A'x + B'y + C' = 0 son perpendiculares, ¿qué relación guardan sus coeficientes?.

   Solución: $(A, B).(A', B') = 0, A.A' + B.B' = 0$

10. Hallar m y n en las ecuaciones mx + 2y = 6, nx - 7y = 9 sabiendo que las rectas que representan son paralelas y la primera pasa por el punto del eje OX que dista 3 unidades del origen.

    Solución: $m = 2, n = -7$

11. Una recta corta a los semiejes positivos determinando con ellos un triángulo de 30 cm de perímetro y 30 cm$^2$ de área. Hallar su ecuación.

    Solución: $x/5 + y/12 = 1, x/12 + y/5 = 1$

12. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,-1) y es paralela a la recta 3x + 2y = 1,

    Solución: $3x + 2y - 1 = 0$

13. Se consideran las rectas $\left\{ \begin{array}{l} r : x - 1 = y - 2 \\ s : \frac{3-x}{2} = 3 - y \end{array} \right.$ .

    a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.

    b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r.

    Solución: $P(1, 2); x + y - 3 = 0$

14. Dada la recta $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{4}$.

    a) Hallar la ecuación general de la recta paralela por (7,-1).

    b) Hallar la ecuación normal de la perpendicular por (2,-5).

    c) Hallar la ecuación segmentaria de la paralela que pasa por el punto de intersección de las rectas $r : 2x + y = 3, r' : \dfrac{x+1}{3} = 2 - y$.

    d) Comprobar si (-3,7) pertenece a la recta dada.

    nota: la ecuación normal es la ecuación general cuando el vector ortogonal que determinan los coeficientes de x e y es unitario.

    Solución: a) $4x - 3y - 31 = 0$, b) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{14}{5} = 0$, c) $\frac{x}{-\frac{1}{4}} + \frac{y}{\frac{1}{3}} = 1$, d) no pertenece

15. Determinar el valor de k de modo que la recta 8x + 15y + k = 0 diste 5 unidades del punto (2,3).

    Solución: $k = 24, k = -146$

16. Hallar la distancia del punto A(1,3) a la recta r: x + y = 0, y la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a r.

    Solución: $d = 2\sqrt{2}, -x + y - 2 = 0$

17. Calcular la ecuación de la recta paralela al eje OX y dista 6 unidades del punto P(0,8).

    Solución: $-y + 2 = 0, -y + 14 = 0$

18. Sea el punto A(1,3) y la recta r: $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases} n$. Hallar:

    a) La ecuación de la recta perpendicular a la recta r que pasa por A.

    b) La intersección de esta recta con la recta dada r.

    c) La distancia del punto A a la recta r.

    Solución: a) $x + y - 4 = 0$, b) (1,3), c) 0

19. Dada la recta r : x+1 = y-2 , y el punto P(1,2). Calcular:

    a) Las ecuaciones de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

    b) Hallar el punto de intersección de r y s.

    c) Hallar las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

    Solución: a) $x + y - 3 = 0$, b) (0,3), c) (-1,4)

20. Dada la recta x + 2y = 9 y el punto A(2,1), sabiendo que la recta es mediatriz del segmento $\bar{A}B$, hallar las coordenadas de B. Representación gráfica.

    Solución: (4,5)

21. Hallar la recta que pasa por el punto medio del segmento de extremos A(2,-5), B(4,1), y es perpendicular al recta: (x,y) = (1,-3) + t(2,1)

    Solución: $(x, y) = (3, -2) + t(1, -2)$

22. Dadas las rectas x + y = 0, 2x - y = 0, encontrar la ecuación de las bisectrices.

    Solución: $(\sqrt{5} + 2\sqrt{2})x + (\sqrt{5} - \sqrt{2})y = 0, (\sqrt{5} - 2\sqrt{2})x + (\sqrt{5} + \sqrt{2})y = 0$

23. Hallar la recta paralela a la 3x + 4y + 25= 0;

    a) que dista 2 unidades del origen;

    b) está 3 unidades más lejos del origen que la recta dada;

    c) dista 1 de la recta dada.

    Solución: a) $3x + 4y + 10 = 0, 3x + 4y - 10 = 0$, b)$3x+4y+40 = 0$, c) $3x+4y+30 = 0, 3x+4y+20 = 0$

24. Hallar el ángulo de las rectas r: x + 5y + 2 = 0, s: 2y = 1 - 3x.

    Solución: $45^0$

25. Determinar la ecuación de una recta que pasando por el punto A(5,-2) forma un ángulo de $45^0$ con la recta 3x + 7y - 12 = 0.

    Solución: $+ : y+2 = \frac{2}{5}(x-5), - : y+2 = \frac{-5}{2}(x-5)$

26. Determinar si están alineados los puntos (3,4), (1,2), (5,1). Hallar el área del triángulo que forman si es el caso.

    Solución: 5 $u^2$

27. Hallar la simétrica de la recta x +y -2 = 0 respecto a la recta x -y +1 = 0.

    Solución: la misma recta es la simétrica por ser perpendicular

28. Dado el triángulo ABC, con A(0,0), B(4,7), C($-3$,5). Hallar:

    a) Altura $h$ del vértice C.

    b) Ecuación general de la recta que contiene a la mediana de C.

    c) Ecuación general de la mediatriz del lado AB

    d) Ecuación general de la recta que contiene a la altura de C

    e) Ecuación general de la bisectriz de C

    f) Area del triángulo

    g) Angulo C.

    Solución: a) $\frac{41}{\sqrt{65}}$, b) $3x + 10y - 41 = 0$, c) $8x + 14y - 65 = 0$, d) $4x + 7y - 23 = 0$, e) $(5\sqrt{53} - 2\sqrt{34})x + (3\sqrt{53} - 7\sqrt{34})y - 41\sqrt{34} = 0$, f) $20'5u^2$, g) $74'9^0$

29. Caracterizar geométricamente las familias de rectas:

    a) $3x - (m+2)y + 3 = 0, \quad m \in R$

    b) $5x - 7y + k = 0, \quad k \in R$

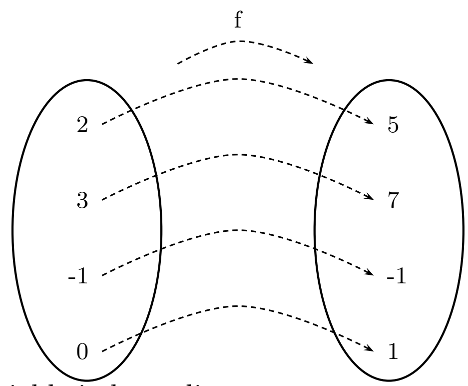
    Solución: a) las rectas pasan por el punto $(-1, 0)$, b) las rectas son paralelas con dirección $(7, 5)$

# 7 FUNCIONES

## 7.1 Función

Una función transforma números en números,

Dicho con más precisión, una función es una aplicación [1] en la que el conjunto original y el conjunto final están formados por números.




Ejemplo

$$\begin{array}{ll} f: & R \longrightarrow R \\ & x \longrightarrow f(x) = 2x + 1 \end{array}$$

Esta función de los números reales en los números reales le asocia a cada número su doble más uno.

En general una función se representa : $y = f(x)$

$x$ es un elemento cualquiera del conjunto original, se llama variable independiente;

$y$ representa su correspondiente imagen en el conjunto final, se llama variable dependiente.

Al conjunto de valores que toma $x$ se le llama **dominio** $D$ , es un subconjunto del conjunto original, si no se especifica, es el mayor posible.

**Ejemplos**

1. $\begin{array}{lll} f: & [-1,1] & \longrightarrow R \\ & x & \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x-2} \end{array}$ , $\quad Dom(f) = [-1,1]$

2. $y = \dfrac{1}{x-2}, \quad Dom(f) = R - 2$

3. $y = \sqrt{x+3}$, ha de ser: $x + 3 \geq 0, x \geq -3, \quad Dom(f) = [-3, \infty)$

   Al conjunto de valores que toma la y se le llama rango, recorrido ó imagen, (se deduce de la gráfica).

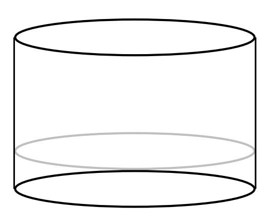
4. Se tiene un depósito cilíndrico de agua de diámetro 10 m y altura 7 m. Expresar el volumen de agua en función de la altura h del agua en el depósito.

   Solución:

   Volumen cilindro = área de la base × altura

   $V = \pi.r^2.h = \pi.25.h \approx 3'14.25.h = 78'5.h \quad m^3$

   El dominio de esta función es $[0, 7]$.



## 7.2 Gráfica de una función

Dada una función $y = f(x)$ , los puntos de coordenadas $(x, f(x))$ representan puntos del plano, el conjunto de ellos es la gráfica de la función.

[1] aplicación quiere decir que un número no puede tener más de una imagen, por ejemplo $y^2 = x$ que equivale a $y = \pm\sqrt{x}$, NO ES FUNCION

**Ejemplos** a) $y = \dfrac{x}{2} + 4$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 4 | 6 |

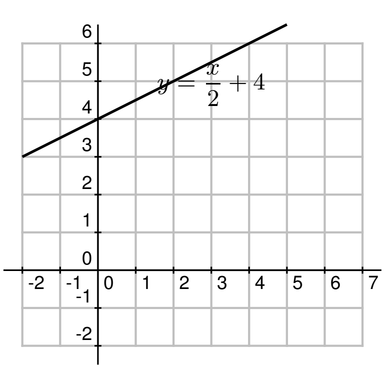
b) $y = 3$

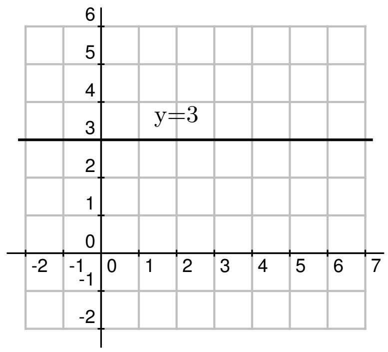
c) $y = x^2 - 4x$ (es una parábola)

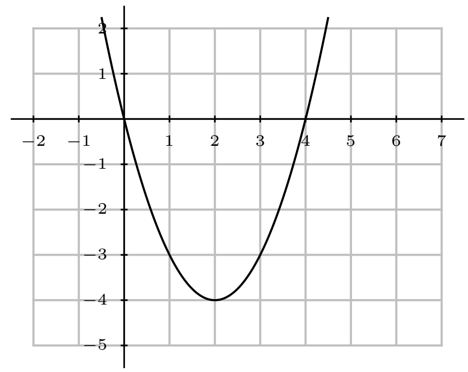
$0 = x^2 - 4x = x(x-4)$

vértice: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 4 | 0 |
| 2 | $-4$ |



d) $f(x) = \begin{cases} 4 & si \quad x \leq -2 \\ x^2 - 2x - 4 & si \quad -2 < x \leq 1 \\ 2x + 1 & si \quad 1 < x \end{cases}$

Como la función está definida a trozos hay que dar también los valores de $x$ en que cambia de expresión.

El primer trozo es una recta horizontal.

El segundo es una parábola:

$y = x^2 - 2x - 4$

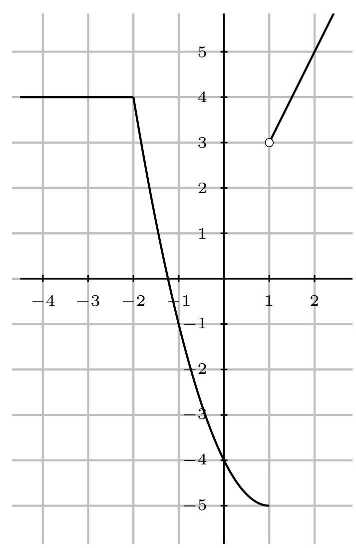
$x^2 - 2x - 4 = 0; x = 1 \pm \sqrt{1+4} = 1 \pm \sqrt{5} \approx \begin{cases} 3'23 \\ -1'23 \end{cases}$

vértice: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

| x | y |
|---|---|
| $3'23$ | 0 |
| $-1'23$ | 0 |
| 1 | $-5$ |
| $-2$ | 4 |

El tercer trozo $2x + 1$ es una recta:

| x | y |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |



## 7.3 Clasificación de las funciones

Recordemos que una función transforma números en números.

**EMPIRICAS:** (No tienen fórmula.) Ej.: temperatura de un enfermo dependiendo del tiempo transcurrido.

**ANALITICAS:** (Con fórmula)

**Trascendentes :** $y = e^x$

**Algebraicas :**

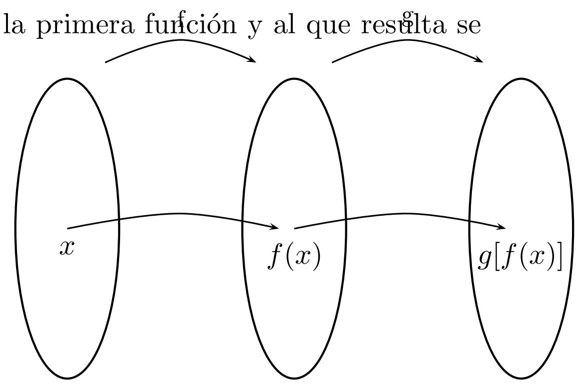
Irracionales : $x$ dentro de raíz: $y = \sqrt{x+4}$.
Racionales : $x$ no dentro de raíz.
Fraccionarias : $x$ en denominador: $y = \dfrac{1}{x+3}$
Polinómicas : $y = \sqrt{3}x - \dfrac{5}{4}$

## 7.4 Operaciones con funciones

Para sumar, multiplicar, dividir, ..., dos funciones, se suman, multiplican, dividen, ..., sus expresiones.
$f(x) = 3x - 5; \qquad g(x) = \sqrt{x}$
$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x - 5 + \sqrt{x}$
$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (3x-5)\sqrt{x}$
$(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x-5}{\sqrt{x}}$

## 7.5 Composición de funciones

En la composición de funciones a un número se le aplica la primera función y al que resulta se le aplica la segunda.



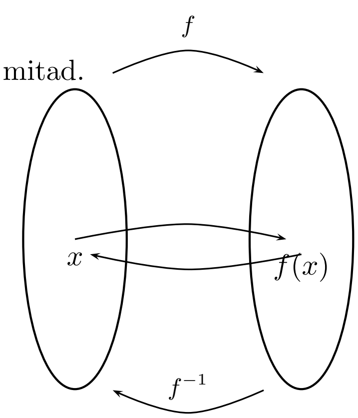

Función compuesta de dos funciones es la función que a cada valor de la variable independiente le asocia la imagen por la $2^a$ función de la imagen de la $1^a$ función.

$f(x) = 2x; \quad g(x) = x^3$
$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x) = (2x)^3 = 8x^3$

La composición de funciones no es conmutativa.
$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^3) = 2x^3$

## 7.6 Función inversa

Si $f$ asocia a $x$ su doble $2x$, la función inversa será $f^{-1}$ que asocia a $x$ su mitad.




Función identidad es la que a cada valor de $x$ le asocia el mismo valor de $x$.

$$i : i(x) = x$$

Dada una función $f$, su función inversa $f^{-1}$ es aquella que compuesta con $f$ da la función idéntica
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = x$ o sea, $f^{-1} \circ f = i$

**Ejemplo** Comprobar que son inversas las funciones:

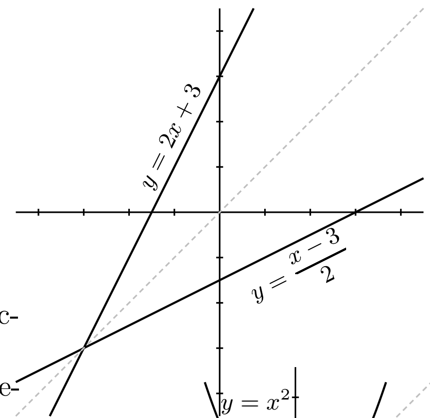
$f : y = 2x + 3, \quad g : y = \dfrac{x-3}{2}$

$g[f(x)] = g(2x+3) = \dfrac{(2x+3)-3}{2} = x$

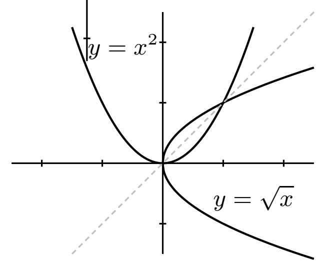
efectivamente: $g = f^{-1}$

| f: x | y |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 2 | 7 |

| g: x | y |
|---|---|
| 3 | 0 |
| 5 | 1 |




Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.
Si $f^{-1}$ es la inversa de $f$, $f$ es la inversa de $f^{-1}$, por eso se dice simplemente que son inversas.
No siempre existe función inversa.
Por ejemplo: $f : y = x^2$
en la gráfica vemos que si hubiera inversa para ella cada original tendría dos imágenes y no sería función



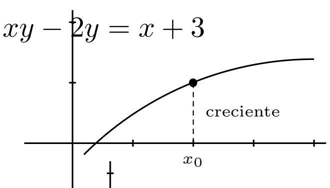

**Cálculo de la función inversa** Para hallar la función inversa, se intercambia la $x$ con la $y$, luego se despeja la $y$.

**Ejemplo** Hallar la inversa de la función : $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$

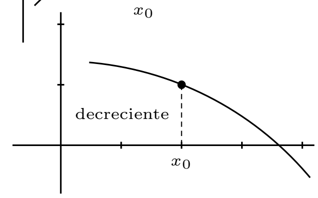
$y = \dfrac{2x-3}{x-1}; \quad x = \dfrac{2y-3}{y-1}; \quad x(y-1) = 2y+3; \quad xy - x = 2y + 3; \quad xy - 2y = x + 3$

$y(x-2) = x+3; \quad f^{-1} : y = \dfrac{x+3}{x-2}$

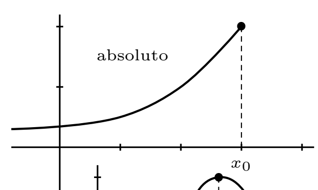
## 7.7 Función creciente, decreciente, máximos y mínimos



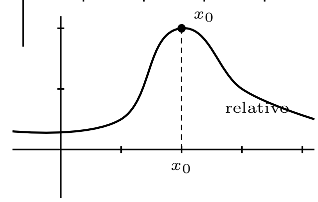

Una función es **creciente** cuando al aumentar la $x$ entonces aumenta la $y$. Gráfica hacia arriba.




Una función es **decreciente** cuando al aumentar la $x$ entonces disminuye la $y$. Gráfica hacia abajo.



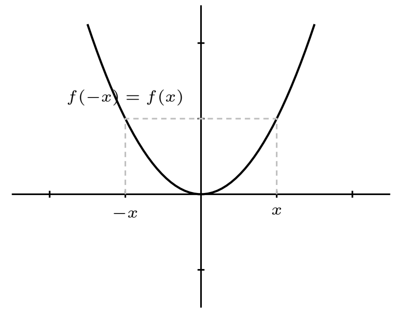

Una función tiene un **máximo absoluto** en un punto $x_0$, si en ese punto toma el mayor valor.




Una función tiene un **máximo relativo** en un punto $x_0$, si en ese punto toma mayor valor que en los puntos de alrededor.

Análogo sería para **mínimo absoluto** y **mínimo relativo**.

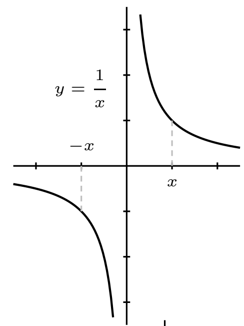
## 7.8 Función par y función impar




Una función $f(x)$ es **par** cuando $f(-x) = f(x)$.

**Ejemplo** La función: $y = x^2$
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ; sí es par.
La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Una función $f(x)$ es **impar** cuando $f(-x) = -f(x)$.

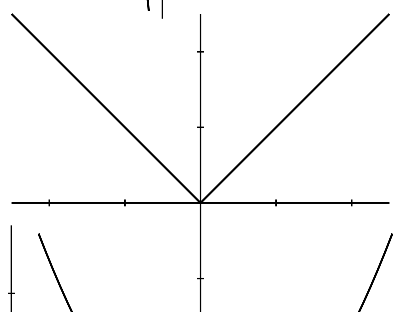



**Ejemplo** $y = \dfrac{1}{x}$
$f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$, sí es impar

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Una función puede no ser par ni impar.

## 7.9 Función valor absoluto



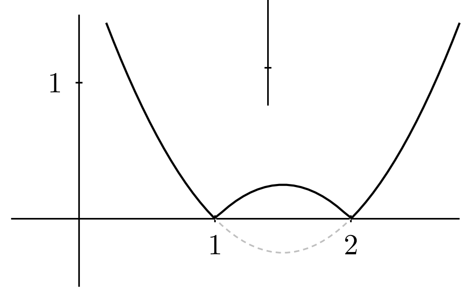
$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

nota: el signo "$-$"delante de una letra le cambia el signo, no dice que sea negativa.

**Ejemplos**

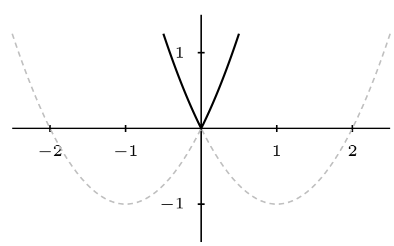
1. Representar $y = |x^2 - 3x + 2|$

   para ello representamos $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y luego hacemos la simetría de la parte que queda debajo del eje de abcisas




2. Representar $y = x^2 + 2|x|$

   escribimos la función a trozos: $y = \begin{cases} x^2 + 2x & si \quad x \geq 0 \\ x^2 - 2x & si \quad x < 0 \end{cases}$




## 7.10 Límite de una función

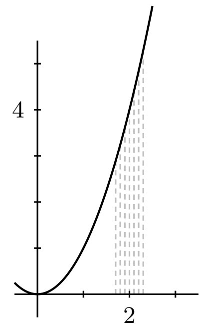
**Límite de una función en un punto** Trata del valor al que se acercan las imágenes cuando la variable independiente se aproxima a un cierto valor $x_0$. Lo normal es que las imágenes se acerquen a la imagen de $x_0$, pero no siempre es así.

Una función $y = f(x)$ tiene por límite a $L$ cuando $x$ tiende a $x_0$ si al acercarse $x$ a $x_0$, entonces la $y$ se acerca a $L$. Esto se escribe : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$
que se lee: "límite cuando $x$ tiende a $x_0$ de $f(x)$ es igual a $L$.

**Ejemplos**

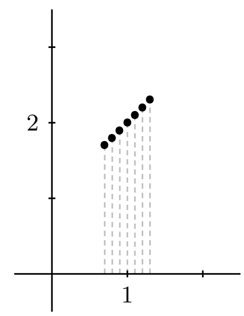
La función $y = x^2$ cuando $x \to 2$

$$\lim_{x\to 2} x^2 = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 1'9 & 1'99 & 1'999 \\ \hline y & 3'61 & 3'96 & 3'99 \\ x & 2'1 & 2'01 & 2'001 \\ \hline y & 4'41 & 4'04 & 4'004 \end{array} \right\} = 4$$




La función $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ cuando $x \to 1$

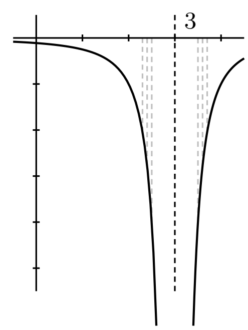
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x-1} = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 0'9 & 0'99 & 0'999 \\ \hline y & 1'9 & 1'99 & 1'999 \\ x & 1'1 & 1'01 & 1'001 \\ \hline y & 2'1 & 2'01 & 2'001 \end{array} \right\} = 2$$



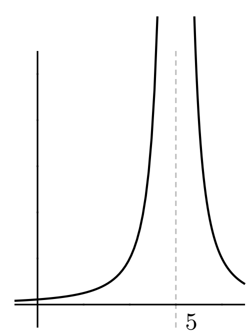

**No hay límite la función se va a infinito:** (nota: **asíntota** es una recta a la cual se acerca la función en el infinito).

Una función $y = f(x)$ tiende a infinito cuando $x$ tiende a $x_0$ si al acercarse $x$ a $x_0$, la $y$ se hace enormemente grande, hay asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x-3)^2} = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 2'5 & 2'7 & 2'9 \\ \hline y & -4 & -11'1 & -100 \\ x & 3'5 & 3'3 & 3'1 \\ \hline y & -4 & -11'1 & -100 \end{array} \right\} = -\infty$$

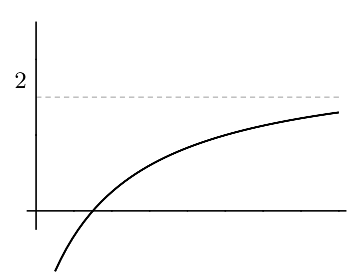



$$\lim_{x\to 5} \frac{1}{(x-5)^2} = \infty$$




**Límite cuando $x$ tiende a infinito:**

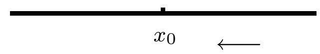
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x+2} = 2;$$



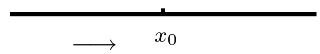

si es un número hay asíntota horizontal;
Análogamente: límite cuando $x$ tiende a $-\infty$

**Límites laterales** Resultan de acercarse $x$ a $x_0$ sólo por uno de los lados:

Si nos acercamos con valores mayores que $x_0$ se llama límite lateral por la derecha y se escribe: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.



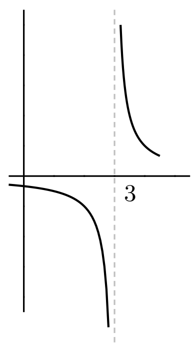

Para la izquierda es $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$




**Ejemplos**

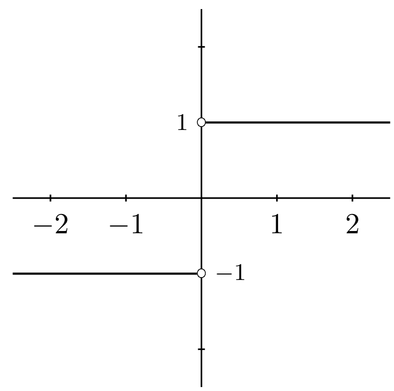
a) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$




b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$




## 7.11 Cálculo de límites de funciones

**1ª regla** Sustituir la $x$ por el valor al cual se acerca $x_0$. El número que resulta es el límite (salvo indeterminación). Ejemplos :

$$\lim_{x \to 2} 3x^2 - 5 = 7; \qquad \lim_{x \to -\infty} 3x^2 - 5 = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x - 5x^2}{6x - 4} = 0; \qquad \lim_{x \to 0} \left( \frac{3}{5x+1} \right)^x = \left\{ 3^0 \right\} = 1$$

**2ª regla: Límite de un polinomio partido por otro polinomio**

1. Cuando $x$ tiende a infinito: Este límite se calcula a partir de las mayores potencias que dan el orden del infinito.

   (a) Cuando el grado del numerador es menor que el del denominador el denominador es más potente el límite es 0.

   $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x - 5}{x^2 + 1} =$ dividiendo por x $= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - \frac{5}{x}}{x + \frac{1}{x}} = 0$

   (b) Cuando el grado del numerador es igual que el del denominador son igualmente potentes el límite es el cociente de los coeficientes de mayor grado.

   $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 5}{7x^2 + x} =$ dividiendo por $x^2 = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - \frac{5}{x^2}}{7 + \frac{1}{x}} = \dfrac{3}{7}$

   (c) Cuando el grado del numerador es mayor que el del denominador el numerador es más potente el límite es $\pm\infty$. En este caso el signo del infinito se deduce del signo de los coeficientes de mayor grado del numerador y del denominador.

   $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{3x - 5} =$ dividiendo por x $= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \frac{1}{x}}{3 - \frac{5}{x}} = \infty$

2. Cuando $x$ tiende a menos infinito es igual que cuando $x$ tiende a infinito. Sólo hay que preocuparse del signo cuando el límite resulta infinito.

   Ejemplo: $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{8x-1} = -\infty$

3. Cuando $x$ tiende a 0 el límite se calcula sacando factor común y simplificando.

   Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5x}{3x+10x^3} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x(3x-5)}{x(3+10x^2)} = \dfrac{3x-5}{3+10x^2} = -\dfrac{5}{3}$

   Ejemplo: Si sale infinito, para saber el signo, en este caso hay que hallar los límites laterales.

   $\lim_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5}{3x+10x^3} = \left\{\dfrac{-5}{0}\right\} = \pm\infty$

   $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{3x^2-5}{3x+10x^3} = \left\{\dfrac{-5}{-0}\right\} = \infty;\qquad \lim_{x\to 0^+} \dfrac{3x^2-5}{3x+10x^3} = \left\{\dfrac{-5}{0}\right\} = -\infty$

4. Cuando $x$ tiende a $a$, siendo $a$ un número distinto de 0:

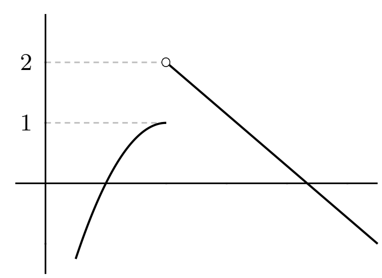
   Ejemplos: $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x+4} = \left\{\dfrac{0}{6}\right\} = 0;\quad \lim_{x\to 2} \dfrac{3x+5}{x^2-4} = \left\{\dfrac{11}{0}\right\} = \pm\infty$

   Para saber el signo del infinito del último ejemplo hay que hacer los límites laterales.

   Cuando resulte indeterminación lo resolveremos por L'Hôpital cuando demos derivadas. De momento se puede hallar descomponiendo en factores y simplificando.

## 7.12 Continuidad de funciones

Una función es continua cuando su gráfica es continua, no da saltos.
Dicho con precisión: una función $f(x)$ es continua en un punto (no aislado) $x_0$, cuando el límite de la función en $x_0$ es igual al valor de la función en $x_0$; es decir:



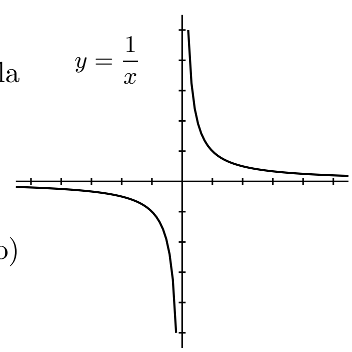

$$f \text{ continua en } x_0 \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Por ejemplo: $y = x^2$ es continua siempre, en cambio $y = \dfrac{1}{x-3}$ es discontinua en $x = 3$.

En la práctica una función no es continua cuando el límite por la derecha es distinto del límite por la izquierda o hay una asíntota vertical.

## 7.13 Función de proporcionalidad inversa

Ejercicio: Dado un triángulo de 6 cm$^2$ de área, representar la función $y = f(x)$ donde $x$ es la base e $y$ es la altura.

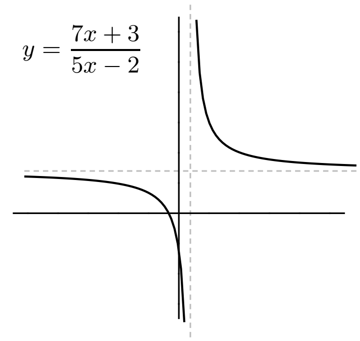



Es el caso más sencillo de función racional. Su gráfica es una hipérbola con asíntotas paralelas a los ejes

Tiene de ecuación $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Para representarla basta hallar los puntos de corte (o algún otro punto) y las asíntotas vertical y horizontal.

**Ejemplo** Representar $y = \dfrac{7x+3}{5x-2}$




**Puntos de corte**

Con $OX$ se hace $y = 0$: resulta $7x + 3 = 0 \quad x = \dfrac{-3}{7}$

Con $OY$ se hace $x = 0$ : resulta $y = \dfrac{-3}{2}$

**Asíntotas**

asíntota vertical, anulamos el denominador:

$5x - 2 = 0 \quad x = \dfrac{2}{5}$;

asíntota horizontal $y = n$, $\qquad n = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x+3}{5x-2} = \dfrac{7}{5}; \quad y = \dfrac{7}{5}$

## Problemas de funciones

1. Hallar las imágenes por $f(x) = 3x^2 - 1$

   a) de 5; b) de $-1$; c) de $h$ ; d) de $x_0 + h$; e) de $\frac{x+5}{7}$

   Solución: a) 74, b)2, c) $3h^2 - 1$, d) $3(x_0 + h) - 1$, e) $3\left(\frac{x+5}{7}\right)^2 - 1$

2. Hallar de quién es imagen por la función $y = x^2 + 2x - 15$

   a) y = 0; b) y = $-11$ c) y = $-15$

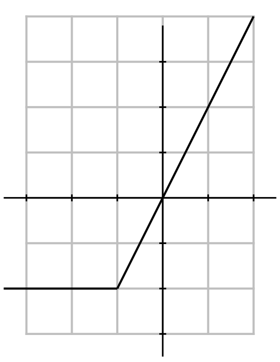
   Solución: a) $3, -5$, b) $-1 \pm \sqrt{5}$, c) $0, -2$

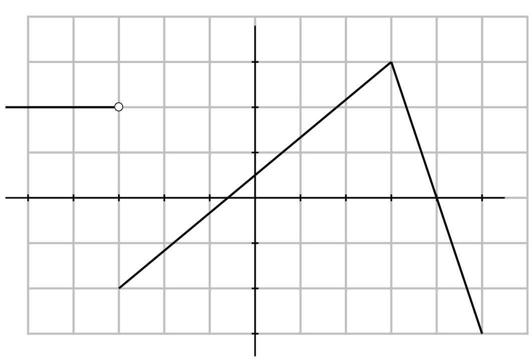
3. Hallar la expresión de las funciones de gráficas

   Solución:

   a) $f(x) = \begin{cases} -2 & si \quad x \leq -1 \\ 2x & si \quad -1 < x \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < -3 \\ \frac{5x+3}{6} & si \quad -3 \leq x \leq 3 \\ -3x + 12 & si \quad 3 < x \end{cases}$





4. Hallar el dominio de a) $y = \dfrac{2}{1 - 3x^2}$, b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

   Solución: a) $R$ excepto $\pm\sqrt{1/3}$, b) $]-2, 2[$

5. Se quiere construir un pozo en forma cilíndrica de 2 m de diámetro. Expresar el volumen de agua que cabe en el pozo en función de su profundidad h.

   Solución: $f(x) = \pi.x$

6. Sabiendo que el cambio actual del dólar está a 110 pts y que el banco cobra una comisión del 0'5 %, escribir las funciones que permiten pasar del valor actual de una moneda a otra.

   Solución: Cambio de pts a \$, $y = \frac{x - 0'005x}{110}$; cambio de \$ a pts $y = (x - 0'005x).110$

7. Representar $f(x) = \begin{cases} 3 - x & si \quad x \leq 3 \\ 2x - 6 & si \quad 3 < x \leq 5 \\ 4 - x & si \quad 5 < x \end{cases}$

8. Representar a) $f(x) = |x^2 - 3x|$, b) $g(x) = x^2 - 3|x| + 2$

9. En una máquina de calcular programable el programa B multiplica por 2 la cantidad introducida y le suma 1. Hallar el resultado de aplicar 4 veces el programa B.

   Solución: $B(B(B(B(x)))) = 16x + 15$

10. Representar $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & si \quad x \leq -2 \\ x^2 - 6 & si \quad -2 < x \leq 4 \\ -x - 1 & si \quad x > 4 \end{cases}$

11. Dado un cubo de arista x hallar: a) la expresión de la función real $d(x)$ que da la suma de las diagonales del cubo. b) hacer la gráfica de la función $y = d(x)$

    Solución: $d(x) = 4\sqrt{3}x$

12. Hallar la condición para que una parábola $y = ax^2 + bx + c$ sea simétrica respecto al eje de ordenadas.

    Solución: $f(x) = f(-x) \forall x \in R, b = 0$

13. Se sabe que $210^0$F equivalen a $100^0$C y que $0^0$ equivalen a $32^0$F. Hallar las funciones lineales que dan la equivalencia de los distintos tipos de grados.

    Solución: x $^0$C, y $^0$F, $y = ax + b, y = \frac{178}{100}x + 32$

14. Un cliente de una compañía tiene una cuota fija mensual de 1.210 pts. Los primeros 250 kw.h consumidos le cuestan a 4'95 pts cada uno; los siguientes hasta 900, a 3'8 pts y los demás a 2'92 pts. Dibújese la función que da el importe del recibo, según los kw.h consumidos. Prepárese la factura, salvo impuestos, de un cliente que consumió: a) 200 kw.h; b) 700; c) 1.000; d) ningún kw.h. e) Otra compañía, con la misma cuota fija, factura todos los kw a 3'8 pts. ¿Cuánto debe consumirse para que los recibos de ambas compañías se eleven a la misma cantidad?

    Solución: $f(x) = \begin{cases} 1210 & si \quad x = 0 \\ 1210 + 4'95x & si \quad 0 < x \leq 250 \\ 1210 + 4'95.250 + 3'8(x - 250) & si \quad 250 < x \leq 900 \\ 1210 + 4'95.250 + 3'8.650 + 2'92(x - 900) & si \quad 900 < x \end{cases}$

15. Suponiendo que en una cabina telefónica los tres primeros minutos de conferencia cuestan 10 pts. y otras 5 pts. por cada tres minutos más o fracción: a) ¿Cuánto cuesta una conferencia de 7 min.? ¿Y de 8 min. 30 seg.? b) Representar la función que da el importe de la conferencia en función del tiempo. c) ¿Existe su función inversa?. d) Si han cobrado 38 pts. por una conferencia ¿qué puedes decir del tiempo que ha durado?

    Solución: $f(x) = \begin{cases} 10 & si & t \in ]0,3] \\ 15 & si & t \in ]3,6] \\ 20 & si & t \in ]6,9] \\ 25 & si & t \in ]9,12] \end{cases}$ , $f(7) =$ 20 pts, $f(8'5) = 20$ pts, no hay inversa por no ser inyectiva.

16. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{3x+2}{5}$; $g(x) = 6x^2 - 1$. Hallar:

    a) $f.g$ ; b) $f \circ g$ ; c) $g[f(x)]$ ; d) $f^2 - g$ ; e) $f^2/g$

    Solución: a) $\frac{18x^3+12x^2-3x-2}{5}$, b) $\frac{18x^2-1}{5}$, c) $\frac{54x^2+72x-1}{25}$, d) $\frac{41x^2+12x+29}{25}$, e) $\frac{9x^2+12x+4}{150x^2-25}$

17. Dadas las funciones $f : y = \dfrac{5-3x}{x-7}$; $g : y = x^2$. Hallar:

    a) $f \circ g$ ; b) imagen de $3 + h$ por $g \circ f$ ; c) inversa de $f$

    Solución: a) $\frac{5-3x^2}{x^2-7}$, b) $\left(\frac{-4-3h}{h-4}\right)^2$, c) $\frac{7x+5}{x+3}$

18. Decir si los puntos $(2,3), (1,-1), (4,-3), (t, 6t-7)$; pertenecen a la gráfica de la función $y = 6x - 7$. Dibujar y escribir su función inversa.

19. Representar $y = |2x + 1|$

20. Dadas las funciones $f : y = \dfrac{5-3x}{x-7}$; $g : y = \sqrt{x}$. Hallar: a) $f \circ g$ ; b) inversa de $f$ ; c) inversa de $g$ ; d) gráficas de $g$ y $g^{-1}$

21. Hallar la función suma de las funciones $f(x) = \begin{cases} x+4 & si \quad x < 0 \\ 2x & si \quad 0 \leq x \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} -x+1 & si \quad x < 2 \\ 3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

    Solución: $(f+g)(x) = \begin{cases} 5 & si & x < 0 \\ x+1 & si & 0 \leq x < 2 \\ 2x+3 & si & 2 \leq x \end{cases}$

22. Dada la función $\dfrac{x^2 - 5x + 6x^3}{3x^2 - 5x - 12x^3}$. Hallar:

    a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; c) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; d) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

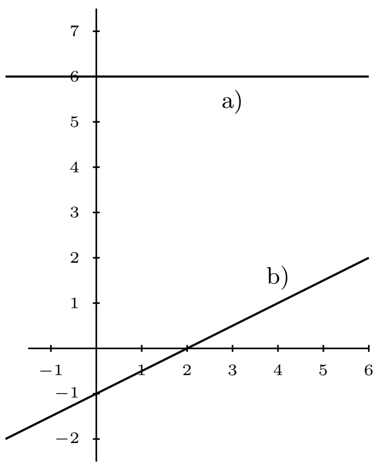
    Solución: a) $-1/2$, b) $-1/2$, c) 1, d) 1

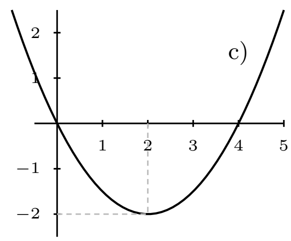
23. Siendo $f : y = x^2 - 3x$ , hallar: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ Solución: 1

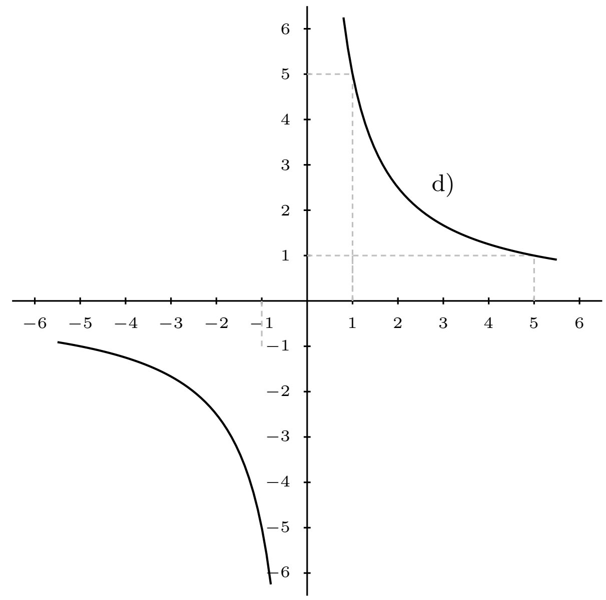
24. El área de un triángulo rectángulo es 20 $cm^2$. Escribir la función que nos da la altura en función de la base. Representarla gráficamente. Buscar dos puntos de esta gráfica y dibujar el triángulo en cada caso.

    Solución: $y = 40/x$

25. Asociar a cada una de estas gráficas su expresión matemática:




Solución: I) $y = 6$, II) $y = \frac{x-2}{2}$, III) $y = x^2/2 - 2x$, IV) $y = 5/x$

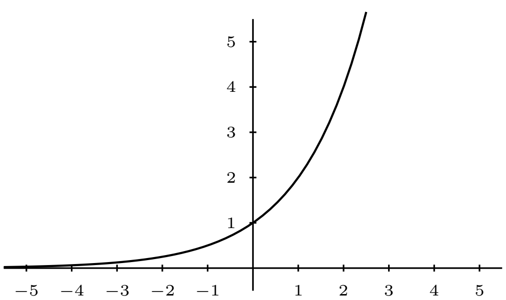
# 8 FUNCIONES TRASCENDENTES

Hasta ahora hemos visto funciones algebraicas que son las que resultan de operaciones con polinomios: productos, cocientes, raíces, etc. Veremos ahora funciones trascendentes.

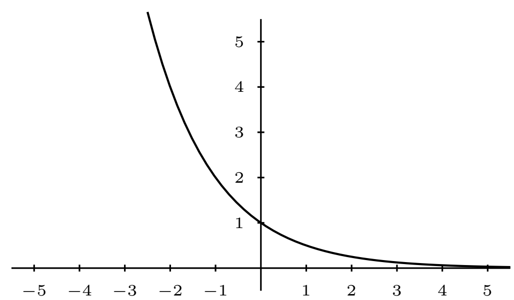
## 8.1 Función exponencial y función logarítmica

**Función exponencial** Es la función en la que la variable independiente hace el papel de exponente de una potencia cuya base es un número mayor que 0.

Por ejemplo $y = 2^x$, $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \left\{= (0'5)^x = \dfrac{1}{2^x} = 2^{-x}\right\}$




$y = a^x$ con $a > 1$
Es creciente.
Es continua e inyectiva (originales distintos dan imágenes distintas).
El dominio son todos los números reales.
El rango son todos los números reales positivos sin el 0.
límite cuando $x$ tiende a $-\infty$ es 0.
límite cuando $x$ tiende a $\infty$ es $\infty$ .




$y = a^x$ con $a < 1$
Es decreciente.
Es continua e inyectiva.
El dominio son todos los números reales.
El rango son todos los números reales positivos sin el 0.
límite cuando $x$ tiende a $-\infty$ es $\infty$
límite cuando $x$ tiende a $\infty$ es 0

**Observaciones:** 1) No hay que confundir la función exponencial con la función potencial. En la función exponencial la base es constante y el exponente variable, por ejemplo $2^x$, y en la función potencial es al contrario, la base es variable y el exponente constante, por ejemplo $x^2$. (También existe la función potencio-exponencial $x^x$)

2) La función exponencial más famosa es $e^x$.

3) En la práctica se dice que un fenómeno sigue una función exponencial si viene dado por una función del tipo $y = a + b.e^{cx}$

**Ejemplo:** Resolver la ecuación: $3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$

$3^{1-x^2} = \dfrac{1}{3^3}$; $\quad 3^{1-x^2} = 3^{-3}$; igualando exponentes $1 - x^2 = -3$; $\quad x = \pm 2$

Hay que comprobar las soluciones en el enunciado. En este caso las dos son válidas. El método consiste en igualar los exponentes una vez igualadas las bases.

**Función logarítmica** La función logarítmica es la inversa de la función exponencial. Su gráfica es por tanto simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

Ejemplo: para la función exponencial $y = 2^x$ :

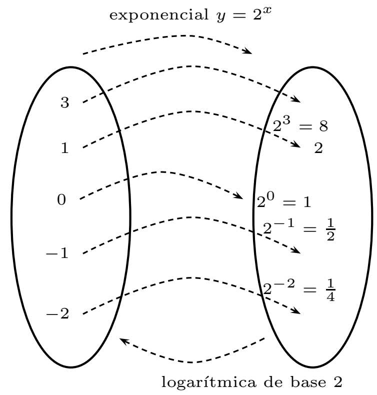
$y = 2^x$

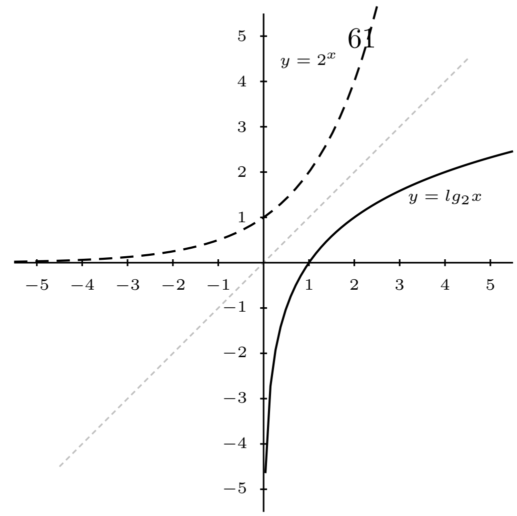
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $-1$ | $-2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 2 | 4 | 8 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

$y = \log_2 x$

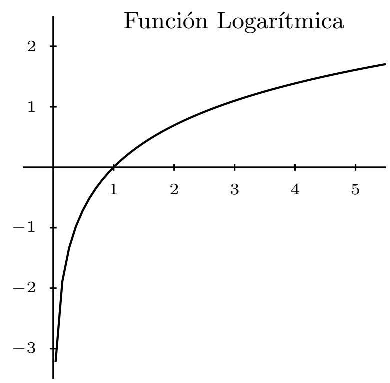
| $x$ | 1 | 2 | 4 | 8 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $-1$ | $-2$ |

Por ejemplo $\log_2 x$, el logaritmo en base 2 de $x$ es el número al que hay que elevar el 2 para obtener $x$.




**Función logarítmica** $y = \log_a x$. Se suele considerar siempre $a > 1$, o sea, logaritmos en base mayor que 1.
Características :
Dominio $R^+$ sin 0
Rango $R$
Continua
Inyectiva creciente
$\log_a 1 = 0$
El límite cuando $x$ tiende a 0 de $\log_a x$ es $-\infty$
El límite cuando $x$ tiende a $\infty$ de $\log_a x$ es $\infty$




**Observaciones:** 1) Los logaritmos más famosos son: a) los logaritmos decimales, en base 10, log; los logaritmos neperianos, en base $e$: ln.

2) Como vemos en la primera característica, no existe logaritmo de un número negativo.

3) En la práctica se dice que un fenómeno sigue una función logarítmica si viene dado por una función del tipo $y = a + b.\ln cx$

**Hallar la parte entera de un logaritmo:** Se trata de encajar el número entre dos potencias seguidas de 10

1) Hallar la parte entera de $\log 237$

$$\begin{array}{ccccc} 100 & < & 237 & < & 1000 \\ +2 & & & & +3 \end{array} \quad \text{La parte entera de } \log 237 \text{ es } 2$$

2) Hallar la parte entera de $\log 0'015$

$$\begin{array}{ccccc} 0'01 & < & 0'015 & < & 0'1 \\ -2 & & & & -1 \end{array} \quad \text{La parte entera de } \log 0'015 \text{ es } -1$$

**Cálculo con logaritmos:** Definición: El logaritmo en base $a$ de un número $x$: $\log_a x$ es el exponente al que hay que elevar la base $a$ para obtener el número $x$.

**Propiedades de los logaritmos:**

1. $\log_a a = 1, \quad \ln e = 1, \quad \log 10 = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. No existen logaritmos de números negativos.
4. No existen logaritmos de 0. Por abuso de lenguaje se suele decir que $\log_a 0 = -\infty$

5. $a^{\log_a x} = x$: $a$ elevado al exponente al que hay que elevar $a$ para obtener $x$ es $x$
6. $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$: el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos.
7. $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$: el logaritmo de un cociente es igual a la resta de los logaritmos.
8. $\log_a x^t = t.\log_a x$: el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.
9. Fórmula del cambio de base $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$. En particular para neperianos y decimales: $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

**Ejemplo** Hallar $\log_2(0'8990)$: $\log_2(0'8990) = \dfrac{\log 0'8990}{\log 2} = \dfrac{-0'046}{0'30} = -1'6$

**Ejemplos**

1. Hallar la inversa de $y = 7 - 3e^{6x+1}$

   $x = 7 - 3e^{6y+1}$; $3e^{6y+1} = 7 - x$; $e^{6y+1} = \dfrac{7-x}{3}$; $\ln e^{6y+1} = \ln \dfrac{7-x}{3}$;

   $(6y+1)\ln e = \ln \dfrac{7-x}{3}$; $6y + 1 = \ln \dfrac{7-x}{3}$; $6y = \ln \dfrac{7-x}{3} - 1$; $y = \dfrac{\ln \frac{7-x}{3} - 1}{6}$

2. Hallar la inversa de $y = \dfrac{\ln(3x+2) + 7}{2}$

   $x = \dfrac{\ln(3y+2)+7}{2}$; $2x = \ln(3y+2) + 7$; $2x - 7 = \ln(3y+2)$; $e^{\ln(3y+2)} = e^{2x-7}$;

   $3y + 2 = e^{2x-7}$; $3y = e^{2x-7} - 2$; $y = \dfrac{e^{2x-7} - 2}{3}$

3. A partir de los logaritmos en base 2, hallar el logaritmo en base 8 de 32.

   $\log_8 32 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 8} = \dfrac{5}{3}$

4. Sabiendo que el $\log 2 = 0'3010$, calcular: $\log \sqrt[3]{0'002}$

   $\log \sqrt[3]{0'002} = \log(0'002)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}\log(0'002) = \dfrac{1}{3}\log \dfrac{2}{1000} = \dfrac{1}{3}(\log 2 - \log 1000) = \dfrac{1}{3}(0'3010 - 3) = \dfrac{-2'699}{3} = -0'899$

5. Resolver la ecuación: $\log(x^2 - 5x + 5) = \log(x - 3)$

   Igualando lo de dentro del logaritmo: $x^2 - 5x + 5 = x - 3$; $x^2 - 6x + 8 = 0$; $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{1} = 3 \pm 1 = \begin{cases} 4 \\ 2 \text{ que no sirve} \end{cases}$

6. $\log(x^2 + 3x + 5) = 0$

   $\log(x^2 + 3x + 5) = 0$; $\log(x^2 + 3x + 5) = \log 1$; $x^2 + 3x + 5 = 1$; $x^2 + 3x + 4 = 0$;

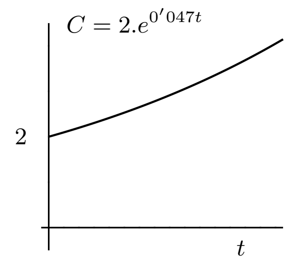
   $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2}$ que no tiene solución.

7. $3^x.5^{2x} = 150$

   Tomando logaritmos: $\log(3^x.5^{2x}) = \log 150$; $\log 3^x + \log 5^{2x} = \log 150$; $x\log 3 + 2x\log 5 = \log 150$; $x(\log 3 + 2\log 5) = \log 150$; $x = \dfrac{\log 150}{\log 3 + 2\log 5} = \dfrac{\log 150}{\log 3 + \log 5^2} = \dfrac{\log 150}{\log 3.5^2} = \dfrac{\log 150}{\log 75} \approx \dfrac{2'17609}{1'875} \approx 1'16$

8. Sabiendo que si la capitalización es continua, $C_0$ pesetas durante $x$ años, a un interés del $R$ % anual, dan como capital final $C$ : $C = C_0.e^{ix}$ con $i = \dfrac{R}{100}$.

   Para un capital inicial de dos millones de pesetas, a un interés anual del 4'7 % :
   a) Representar el capital acumulado en función del tiempo.
   b) Hallar el tiempo que tarda en doblarse el capital inicial.

   a) $C = 2.e^{0'047t}$
   b) $4 = 2.e^{0'047t}$
   $2 = e^{0'047t}$ tomando logaritmos: $\ln 2 = 0'047.t.\ln e$
   $t = \dfrac{\ln 2}{0'047} = 14'747$ años $\approx$ 14 años y 9 meses

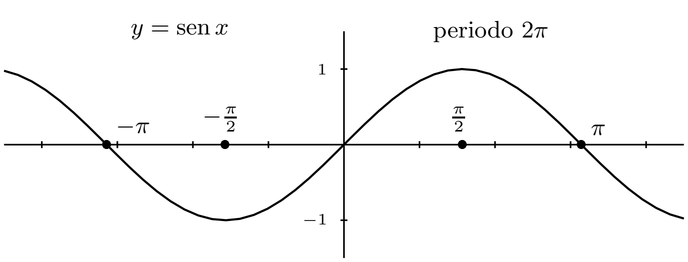
## 8.2 Funciones circulares

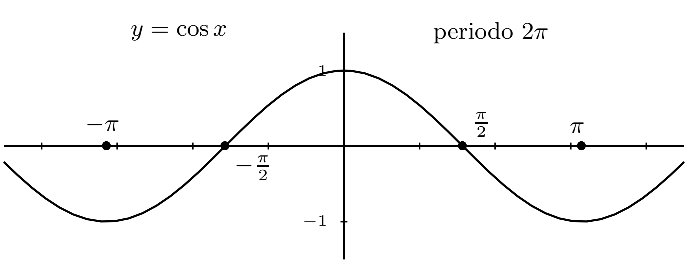
**Razones de ángulos notables**

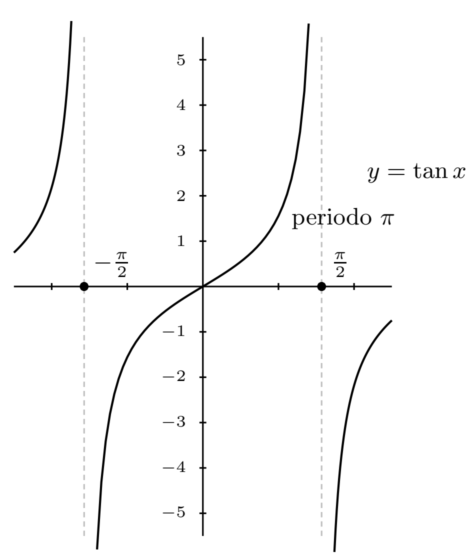
| Radianes | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grados | $0^0$ | $90^0$ | $180^0$ | $270^0$ | $30^0$ | $60^0$ | $45^0$ |
| Seno | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| Coseno | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| Tangente | $0$ | $\pm\infty$ | $0$ | $\pm\infty$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}$ | $1$ |

nota: es frecuente escribir $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

En la circunferencia unidad un arco de un radián tiene longitud 1, de esta forma a la longitud $x$ le podemos asociar un arco de $x$ radianes. Entonces podemos hablar por ejemplo de seno de $x$ siendo $x$ una longitud. Resultan así las funciones circulares:

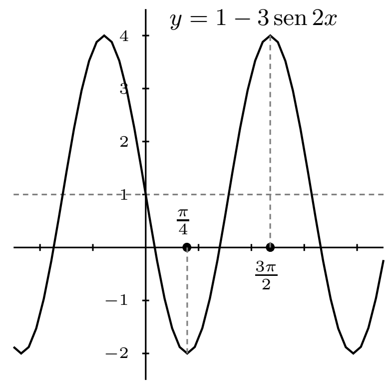


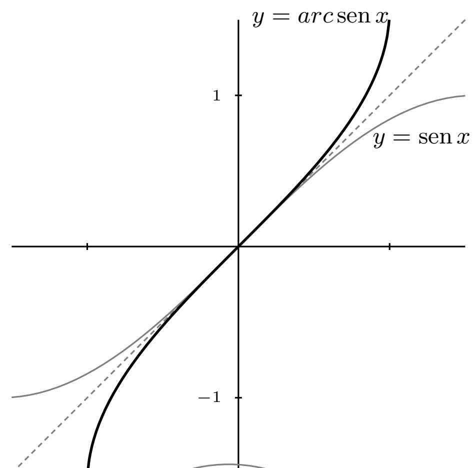
**Ejemplo** Representar $y = 1 - 3.\operatorname{sen} 2x$

| | $x$ | 0 | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| comienzo: | $2x$ | 0 | $\pi/2$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |
| | $\operatorname{sen} 2x$ | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| | $3\operatorname{sen} 2x$ | 0 | 3 | 0 | -3 | 0 |
| | $y = 1 - 3\operatorname{sen} 2x$ | 1 | -2 | 1 | 4 | 1 |




el período de $y = 1 - 3.\operatorname{sen} 2x$ es $\pi$

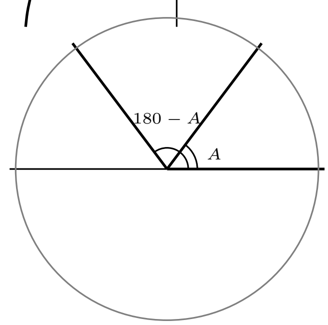
## 8.3 Funciones circulares inversas




Restringiendo el dominio de $y = \operatorname{sen} x$ al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, representar su función inversa arco seno: $y = ar\operatorname{sen} x$
(por ejemplo, $ar\operatorname{sen}\frac{1}{2} = \pi/6$, se lee "el arco cuyo seno vale $\frac{1}{2}$ es $\pi/6$")
Representamos $ar\operatorname{sen}$ basándonos en que las gráficas de funciones inversas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante:
dominio del $ar\operatorname{sen}$ es $[-1, 1]$ rango del $ar\operatorname{sen}$ es $[-\pi/2, \pi/2]$

## 8.4 Resolución de ecuaciones trigonométricas

Observaciones:




1. Como el período del seno es $2\pi$, dentro del período: para que dos ángulos tengan igual seno han de ser iguales o suplementarios (sumar $180^0$), es decir:

   $$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} A \Longleftrightarrow \begin{cases} x = A + 2k\pi \\ x = (\pi - A) + 2k\pi \end{cases} ; k \in Z$$

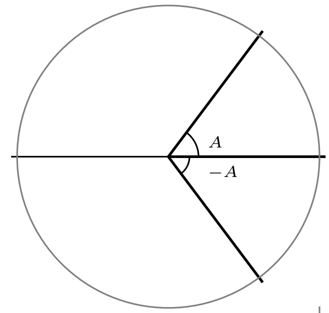
**Ejemplo** Resolver $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 45^0 = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}, \quad x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ;

$x = \left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi; \quad k \in Z$

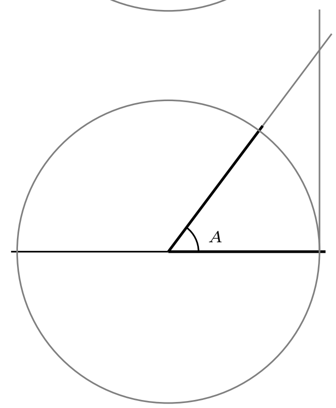
2. Como el período del coseno es $2\pi$ , dentro del período: para que dos ángulos tengan igual coseno han de ser iguales u opuestos, es decir:

   $$\cos x = \cos A \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = A + 2k\pi \\ x = -A + 2k\pi \end{array} \right. ; k \in Z$$




3. Como el período de la tangente es $\pi$ , dentro del período: para que dos ángulos tengan igual tangente han de ser iguales, es decir:

   $\tan x = \tan A \Longleftrightarrow x = A + k\pi; k \in Z$




**Ejemplos** Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x$. Dar las soluciones entre 0 y $3\pi/2$.

   $3x = x + 2k\pi; \quad x = k\pi, k \in Z$, primer grupo de soluciones.

   $3x = (\pi - x) + 2k\pi; 4x = \pi + 2k\pi; \quad x = \pi/4 + k\pi/2; k \in Z$ segundo grupo de soluciones.

   Las soluciones entre 0 y $3\pi/2$ son: $0, \pi, \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$.

2. $\tan x = -\tan(2x)$

   $\tan x = \tan(-2x); x = -2x + k\pi$ ; las soluciones son: $x = k\pi/3; k \in Z$

3. $\cos x = -\cos 2x$. Hallar la soluciones entre 0 y $\pi$ .

   $\cos x = -(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)$

   $\cos x = -\cos^2 x + 1 - \cos^2 x$

   $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0; \cos x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1\pm3}{4} = \left\{ \begin{array}{l} 1/2 \\ -1 \end{array} \right.$

   luego: $\left\{ \begin{array}{ll} \cos x = 1/2 & x_1 = \pi/3 \\ \cos x = -1 & x_2 = \pi \end{array} \right.$

   otro procedimiento:

   $\cos x = -\cos 2x$

   $$\cos x = \cos(\pi - 2x) \left\{ \begin{array}{lll} x = (\pi - 2x) + 2k\pi & 3x = \pi + 2k\pi & x = \frac{\pi+2k\pi}{3} \\ x = -(\pi - 2x) + 2k\pi & -x = -\pi + 2k\pi & x = \pi - 2k\pi \end{array} \right.$$

   que da las mismas soluciones de antes entre 0 y $\pi$

## Problemas de funciones trascendentes

1. Hallar el exponente al que hay que elevar 7 para obtener $sqrt[3]2401$

2. Hallar la gráfica de la función $y = \log_3 x$, sabiendo que es la función inversa de $y = 3^x$ . Deducir sus características: dominio, crecimiento, etc.

3. Calcular los siguientes logaritmos:

   a) $\log_2 64$; b) $\log_3 81$ ; c) $\log 100.000.000$; d) $\log_2 0'125$; e) $\log_2 2^4$; f) $\log 0'00000000001$; g) $\log_3 \frac{1}{3}$; h) $\log_2 0'5$; i) $\log_2 \sqrt{2}$; j) $\ln e^{x-1}$ k) $\ln 1/e$

   Resolver las siguientes ecuaciones:

4. $\frac{1}{2}^{3x-4} = 32$

5. $a^{x^2+x-2} = 1$ siendo $a > 0$

6. Calcular la parte entera de los logaritmos siguientes a) $\log 238$; b) $\log 125'4$; c) $\log 2'5$; d) $\log 0'75$; e) $\log 0'005$; f) $\log 10^6$

7. Hallar la inversa de $y = e^{1-x} + 1$

8. Hallar la inversa de $y = \ln x + 4$

9. Hallar la inversa de $y = \ln \sqrt{3x - 2}$

10. Resolver las ecuaciones:

    a) $\log_{25} x = \frac{1}{2}$; b) $\log_4 8 = x$; c) $\log_x 2 = 0'25$

11. Resolver las ecuaciones: a) $\log_3 x = 0$; b) $\log_2 0 = x$; c) $\log_2 = 7$; e) $\log_x 125 = 3$

    Resolver las siguientes ecuaciones:

12. $\ln(x^2 + 3x + 2) = 0$

13. $\ln(2x^2 - 4) = 2$

14. Una empresa de componentes electrónicos sacó al mercado un nuevo microprocesador. La proporción P de fabricantes de ordenadores que lo utilizan al cabo de t años es $P = \dfrac{1}{1 + C.e^{kt}}$. En el instante $t = 0$, sólo lo utilizaban el 2%. Suponiendo que hoy, a cuatro años de su aparición, lo usan ya el 50% de los fabricantes, calcúlense las constantes C y k. Después, averígüese cuánto tiempo debería transcurrir para que lo usaran el 90% de los fabricantes.

    Solución: unos 4 años

15. La fórmula $P(t) = P_0 e^{kt}$ expresa el valor de la población $P(t)$ al cabo de t años, para una ciudad, con una tasa anual de crecimiento K, constante. a) ¿Qué significado tiene $P_0$? b) En 1.985, dos ciudades A y B poseian 18'8 y 17'3 millones de habitantes respectivamente. Para el año 2.000, si se mantienen las tasas anuales de crecimiento de ambas ciudades, se estima que tendrán 20'2 y 25'8 millones de habitantes respectivamente. Hallar las tasas de crecimiento de las ciudades A y B, y calcular el año en que las dos ciudades tendrán la misma población.

    Solución: a) $P_0$ población inicial, b) ciudad A: $P(15) = 18'8.e^{15k_A} = 20'2$, $\quad 15.k_A = \ln \frac{20'2}{18'8}, k_A = 0'0047$, de igual modo $k_B = 0'026$, las poblaciones serán iguales para $t = 3'81$

16. Representar $y = \cos 2x$

17. Representar $y = 2 \operatorname{sen} 3x$

18. Encontrar los valores de x para los que es máxima la función $y = 2 \cos 2x$.

    Solución: $x = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, -2\pi, -4\pi, \dots = k\pi;\ k \in Z$

    Representar:

19. $y = 2 \cos x - 3$

20. $y = \tan 3x$

21. $y = 4 - 2 \operatorname{sen}(x/2)$

22. Representado $y = \cos x$ en el intervalo $[0, \pi]$, hallar la gráfica de $y = ar \cos x$. Dando el dominio y el rango.

23. Encontrar los valores de x para los que es máxima la función $y = 2 \cos 2x$.

    Solución: $x = k\pi, k \in Z, y = 2$

24. Resolver a) $\operatorname{sen} x = -1/2$; b) $\cos x = \sqrt{3}/2$; c) $\tan x = 1$

25. Resolver a) $\operatorname{sen} 2x = 1/2$; b) $\cos 6x = \cos(3x-5)$; c) $\tan 2x = \tan(1-x)$

Solución: a) $\frac{\pi}{12} + \pi k, \frac{5\pi}{12} + \pi k$ b) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{5}{3}, \frac{2k\pi}{9} - \frac{5}{9}$ c) $\frac{1+k\pi}{3}$

# 9 DERIVADAS. INTEGRALES

## 9.1 Derivada de una función en un punto

Sea una función real $f(x)$ definida en el dominio $D$, subconjunto de $R$. Se define derivada de la función $f(x)$ en el punto $x_0 \in D$ como:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

cuando este límite es un número.

**Ejemplos** Veamos si las funciones siguientes son derivables en los puntos que se indican

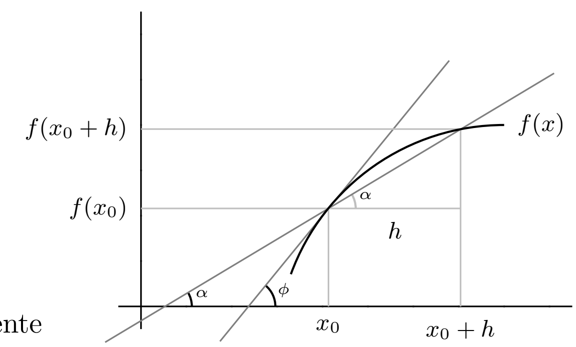
1. $y = x^2 + 3$ en $x_0 = 5$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(5+h)^2 + 3 - (5^2+3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 10h}{h} = 10$$

2. $y = \dfrac{1}{x+2}$ en $x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{3+h+2} - \frac{1}{3+2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(5+h)5} = \frac{-1}{25}$$

## 9.2 Interpretación gráfica de la derivada



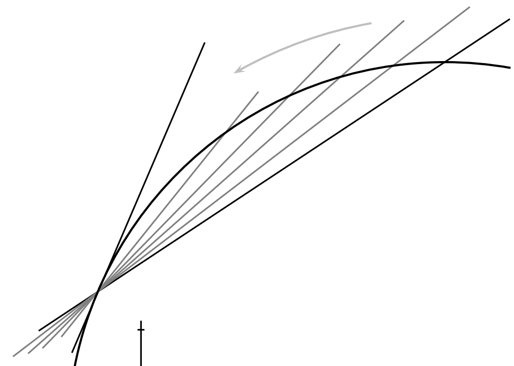

Llamando a $h$ incremento de $x$

$f(x_0+h) - f(x_0)$ incremento de $y$, resulta:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \tan \alpha$$

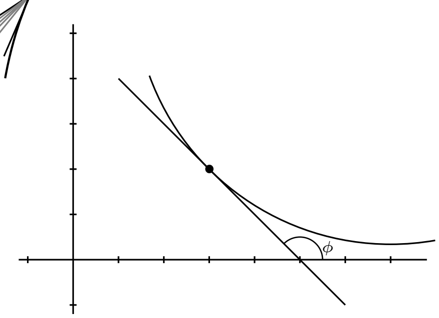
cuando $h \to 0$ la recta secante $PQ$ tiende a la recta tangente en $x_0$ y los ángulos $\alpha$ tienden al ángulo $\phi$, se tiene:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\alpha \to \phi} \tan \alpha = \tan \phi = m$$



Se llama pendiente de una recta a la tangente del ángulo que forma con el eje de las x positivas. Por tanto:

La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto.

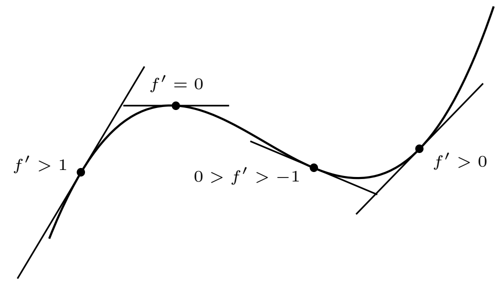



Por tanto la derivada de una función en un punto dice como crece una función y lo hace midiendo la inclinación de la recta tangente pues la derivada es la pendiente de la recta tangente.

$$f'(x_0) = \tan \phi = m$$

Según la derivada sea positiva o negativa la función sube o baja.

Cuanto mayor es la derivada en valor absoluto más vertical es la gráfica.

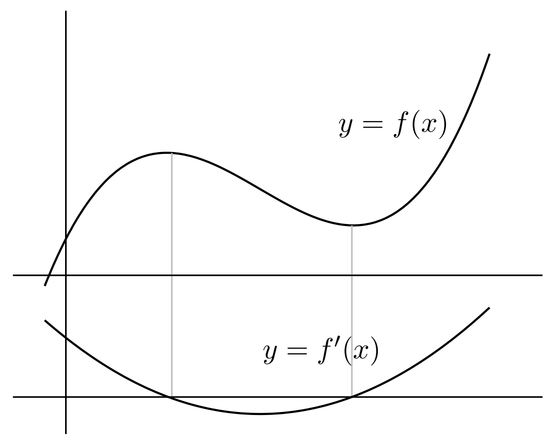



## 9.3 Función derivada

Si una función $y = f(x)$ definida en un dominio $D$ tiene derivada en cada punto de $D$ resulta una función que se llama función derivada y se representa $y' = f'(x)$

También se representa la función derivada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = [f(x)]'$$




**Ejemplo** Hallar la derivadas de las funciones:

1) $y = x^2 + 3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 3 - (x^2+3)}{h} = 2x$$

$y' = 2x$ es la función derivada de $y = x^2 + 3$

2) $y = \dfrac{1}{x-2}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x^2 - 4x + 4 + hx - 2h)} = \frac{-1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

## 9.4 Interpretación física de la derivada

Por ejemplo la velocidad es el ritmo de cambio del espacio con respecto al tiempo: $v(t) = \dfrac{\mathrm{de}}{\mathrm{dt}}$.
La aceleración es el ritmo de cambio de la velocidad con respecto al tiempo: $a(t) = \dfrac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}$

## 9.5 Cuadro de derivadas

Reglas de derivación:

| | |
|---|---|
| $(c)' = 0$ | la derivada de una constante es 0 |
| $(x^n)' = n.x^{n-1}$ | para derivar una potencia se baja el exponente y se le resta una unidad. En particular: $(x)' = 1$; $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ la derivada de una raíz es 1 partido por dos veces la raíz; $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$ |
| $(f+g)' = f' + g'$ | la derivada de la suma es la suma de las derivadas |

| | |
|---|---|
| $(f.g)' = f'g + fg'$ | la derivada de un producto es la derivada del $1^0$ por el $2^0$ más el $1^0$ por la derivada del $2^0$ |
| $(c.f)' = c.f'$ | la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función |
| $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ | la derivada de un cociente es la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador, partido por el denominador al cuadrado |
| $(g[f(x)]' = g'[f(x)].f'(x)$ | la derivada de la función compuesta, función de función, es la derivada de la exterior en la interior, por la derivada de la interior. |

**Derivadas de funciones elementales:**

$$(e^x)' = e^x$$
$$(a^x)' = a^x.La$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a}$$
$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\cot x)' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$$
$$(arc \operatorname{sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arc \cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arc \tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

**Ejemplos**

1. $y = x^2; \quad y' = 2x$
2. $y = 2x^3; \quad y' = 6x^2$
3. $y = 3x^4 - 2x; \quad y' = 12x^3 - 2$
4. $y = (x^2 - 3)(2x + 3x^5); \quad y' = 2x(2x + 3x^5) + (x^2 - 3)(2 + 15x^4)$
5. $y = \dfrac{2x - 3x^5}{7x - 5}; \quad y' = \dfrac{(2 - 15x^4)(7x - 5) - (2x - 3x^5)7}{(7x - 5)^2}$
6. $y = \sqrt{x}$; poniendo $y = x^{1/2}$ resulta: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
7. $y = \sqrt[3]{x}$ ; poniendo: $y = x^{1/3}$ resulta: $y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
8. $y = \dfrac{5x^4 - 3\sqrt{x}}{1 - x}; \quad y' = \dfrac{(20x^3 - \frac{3}{2\sqrt{x}})(1 - x) - (5x^4 - 3\sqrt{x})(-1)}{(1 - x)^2}$
9. $y = 7\cos(2x - 5); \quad y' = -14\operatorname{sen}(2x - 5)$
10. $y = 2e^{x-x^2}; \quad y' = 2(1 - 2x)e^{x-x^2}$
11. $y = (2x^3 + 5x - 2)^4; \quad y' = 4(2x^3 + 5x - 2)^3.(6x^2 + 5)$
12. $y = \sqrt{5x + 1}; \quad y' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x + 1}}$

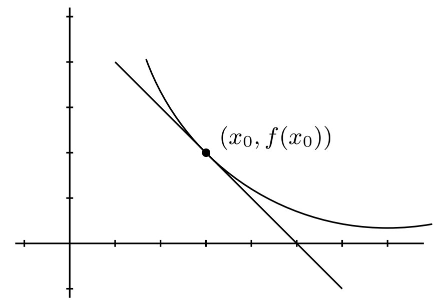
13. Derivar simplificando $y = \dfrac{2x+1}{(x+3)^2}$; $\quad y' = \dfrac{2(x+3)^2 - (2x+1)2(x+3)}{(x+3)^4} =$

dividiendo numerador y denominador por $(x+3)$ $= \dfrac{2x+6-4x-2}{(x+3)^3} = \dfrac{-2x+4}{(x+3)^3}$

14. Derivar simplificando

$$y = \left(\frac{1-x}{x-1}\right)^3 \quad y' = 3\left(\frac{1-x}{x-1}\right)^2 . \frac{2-(x-1)-(1-x)}{(x-1)^2} = 3\left(\frac{1-x}{x-1}\right)^2 . \frac{0}{(x-1)^2} = 0$$

## 9.6 Recta tangente a una curva




Como la ecuación de una recta que pasa por el punto $(x_0, y_0)$ y tiene de pendiente $m$ es: $y - y_0 = m(x - x_0)$, si queremos calcular la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x_0$, será:

$y_0 = f(x_0)$

$m = f'(x_0)$

**Ejemplo** Hallar la tangente a la curva $y = x^2 - 5x$ en el punto de abcisa 7.
$f'(x) = 2x - 5, \quad m = f'(7) = 9, \quad f(7) = 14$
Recta tangente $y - 14 = 9(x - 7)$

## 9.7 Regla de L'Hôpital

En el cálculo de límites, la regla de L'Hôpital resuelve directamente las indeterminaciones $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\boxed{\lim_{x\to\ldots} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{matrix} 0/0 \\ \infty/\infty \end{matrix} = \lim_{x\to\ldots} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Cuando hay indeterminación, el límite del cociente es igual al límite del cociente de las derivadas. Obsérvese que es el cociente de las derivadas, no la derivada del cociente.

En el caso de raíces o fracciones hay que procurar no aplicar esta regla porque se complican al derivar.

Si se aplica reiteradamente, cada vez hay que recomponer.

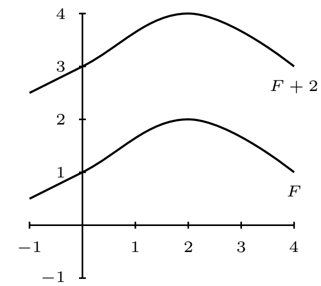
**Ejemplos**

1. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 8x^2 + 4x + 6}{x^2 - 9} = \begin{matrix} 0/0 \\ \text{L'Hôpital} \end{matrix} = \lim_{x\to 3} \frac{6x^2 - 16x + 4}{2x} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos^2 x - e^x - 1}{3 + x \operatorname{sen} x - 3\cos x} = \begin{matrix} 0/0 \\ \text{L'Hôpital} \end{matrix} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos x \operatorname{sen} x - e^x}{\operatorname{sen} x + x\cos x + 3\operatorname{sen} x} = \left\{\frac{-1}{0}\right\} = -\infty$

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 3x^2}{x^2 + 1} = \begin{matrix} \infty/\infty \\ \text{L'Hôpital} \end{matrix} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 6x}{2x} = \begin{matrix} \infty/\infty \\ \text{L'Hôpital} \end{matrix} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 6}{2} = \infty$

## 9.8 Primitiva de una función




Sea $f$ una función, la función $F$ se dice primitiva de $f$ cuando la derivada de $F$ es $f$; es decir $F' = f$. Por tanto:
"$F$ primitiva de $f$"equivale a "$f$ es derivada de $F$"
Por ejemplo: dada la función $2x$ una primitiva de ella es $x^2$, también es primitiva de ella $x^2 + 5$.
Luego dada una primitiva cualquiera, sumándole cualquier constante se obtiene otra primitiva, se escribe:
$\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$
en el ejemplo $\displaystyle\int 2xdx = x^2 + C$

A la primitiva se le llama también integral.

**Propiedades**

1. $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$; la integral de la suma es igual a la suma de las integrales.

2. $\displaystyle\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$; la integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función, es decir los números pueden entrar o salir en el signo integral.

   La demostración es consecuencia inmediata de la mismas propiedades de la derivación.

**Ejemplos**

1. $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

2. $\displaystyle\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$; en general para integrar una potencia se suma una unidad al exponente y se divide por el nuevo exponente $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $\displaystyle\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$

4. $\displaystyle\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

5. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2}dx = 3\int x^{-2}dx = 3\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-3}{x} + C$

6. $\displaystyle\int (5x^3 + 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx = 5\int x^3 dx + 2\int x^{1/2}dx - \int x^{-1/2}dx = 5\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2} = \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + C$

## 9.9 Tabla de primitivas inmediatas

Son aquellas en las que el integrando es la derivada de una función elemental.

$\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$; para integrar una potencia se suma una unidad al exponente y se divide por el nuevo exponente.

$\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ”logarítmica”

$\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ”exponencial”

en particular: $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

”trigonométricas”:

$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$

$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -cot x + C$

”trigonométricas inversas”:

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc \operatorname{sen} x + C$

$\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = arc \tan x + C$

Las demostraciones son inmediatas, basta derivar los segundos miembros.

**Ejemplos**

1. $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 5\sqrt{x} - 4x + 2}{x} dx = \int (3x + 5x^{-1/2} - 4 + 2/x) dx = \frac{3x^2}{2} + \frac{5x^{1/2}}{1/2} - 4x + 2\ln|x| + C$
2. $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2ar \operatorname{sen} x + C$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{3(x^2+1)} dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{3} arc \tan x + C$
4. $\displaystyle\int 5\cos x dx = 5 \operatorname{sen} x + C$
5. $\displaystyle\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$
6. Hallar la función que pasa por el origen y por el punto $(1, 8)$ y tiene como derivada segunda $f''(x) = x^2$

   Tenemos que integrar dos veces:

   $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

   $\displaystyle\int \left(\frac{x^3}{3} + C\right) dx = \frac{x^4}{12} + Cx + D$

   $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + Cx + D$ , hacemos que pase por $(0, 0)$ y resulta $D = 0$, hacemos que pase por $(2, 8)$ y resulta:

   $f(2) = \dfrac{2^4}{12} + 2C = 8; \quad 8 = \dfrac{4}{3} + 2C; \quad C = \dfrac{20}{6} = \dfrac{10}{3}$ Resulta: $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{10x}{3}$

## Problemas de derivadas e integrales

1. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada en x = 3 de la función $f(x) = 5x^2 - x + 2$. Hallar la recta tangente en x = 3. Representar gráficamente. Solución: $f'(3) = 29$; $y = 29x - 43$

2. Hallar la función derivada de la función del problema anterior aplicando la definición. Solución: $f'(x) = 10x - 1$

3. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada de $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$ en x = 1.

4. Hallar, por la definición las funciones derivadas de las funciones del problema anterior.

5. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ en x = 1.

6. La posición de un móvil en función del tiempo es s = 20 + 4t (espacio en metros, tiempo en segundos); calcular utilizando la definición de derivada su velocidad a los 20 segundos, y al cabo de 5 minutos. Hallar la función velocidad instantánea. ¿Qué tipo de movimiento tiene?

   Solución: $s'(20) = 4, s'(300) = 4, s'(t) = 4$, movimiento de velocidad constante uniforme

   En los siguientes el enunciado es "calcular la derivada":

7. $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x - 1}{3x^3 - x^2 + 5}$

   Solución:

   $f'(x) = \frac{(9x^2+2)(3x^3-x^2+5)-(3x^3+2x-1)(9x^2-2x)}{(3x^3-x^2+5)^2}$

8. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x - 4} - 2x$

   Solución: $f'(x) = \frac{(4x-3)(x-4)-(2x^2-3x)}{(x-4)^2} - 2$

9. $f(x) = x.\ln(x + 1)$

   Solución: $f'(x) = \ln(x + 1) + \frac{x}{x+1}$

10. $f(x) = (arc\cos x)\ln(x + 1)$

    Solución:

    $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.\ln(x + 1) + (arc\cos x)\frac{1}{x+1}$

11. $f(x) = xe^{2x}$

    Solución: $f'(x) = e^{2x} + 2x.e^{2x}$

12. $f(x) = \operatorname{sen} x.\ln x$

    Solución: $f'(x) = \cos x.\ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

13. $f(x) = \dfrac{x - 3}{\sqrt{x^2 - x}}$

    Solución: $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}-(x-3)\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}}{x^2-x}$

14. $f(x) = (\tan x.log_a x)^2$

    Solución: $f'(x) = 2(\tan x.log_a x)(\frac{1}{\cos^2 x}.log_a x + \tan x.\frac{1}{x.\ln a})$

15. $f(x) = \dfrac{x.\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

    Solución:

    $f'(x) = \frac{(\cos x - x.\operatorname{sen} x - \cos x)x^3 - (x.\cos x - \operatorname{sen} x)3x^2}{x^6}$

16. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2))$

    Solución:

    $y' = \cos[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2)].\cos(\operatorname{sen} x^2).(\cos x^2).2x$

17. $y = (3e + 5)^{3x-1}$

    Solución: $y' = (3e + 5)^{3x-1}.3.\ln(3e + 5)$

18. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5x}{x(x^2 + 1)}$

    Solución: $f'(x) = \frac{(8x-5)(x^3+x)-(4x^2-5x)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}$

19. $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

    Solución: $f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}.x - \tan x}{x^2}$

20. $f(x) = \dfrac{\ln(2x^2)}{x - 3}$

    Solución: $f'(x) = \frac{\frac{4x}{2x^2}(x-3)-\ln(2x^2)}{(x-3)^2}$

21. $f(x) = [\ln(2x^2)].\tan(x - 3)$

    Solución: $f'(x) = \frac{1}{2x^2}.4x.\tan(x - 3) + \frac{\ln(2x^2)}{\cos^2(x-3)}$

22. $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{2x^2 - 3}$

    Solución: $f'(x) = \frac{e^{x-1}(2x^2-3)-e^{x-1}.4x}{(2x^2-3)^2}$

23. $y = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\, x}{2x-1}$

    Solución: $y' = \frac{2\cos x(2x-1)-2(2\,\mathrm{sen}\, x)}{(2x-1)^2}$

24. $y = \dfrac{\sqrt{2x^2-3x}}{2x-1}$

    Solución: $y' = \frac{\frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x}}(2x-1)-2\sqrt{2x^2-3x}}{(2x-1)^2}$

25. $y = (1/x^2).ar\tan x$

    Solución: $y' = (-2/x^3).ar\tan x + (1/x^2)\frac{1}{1+x^2}$

26. $y = \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \mathrm{sen}\, x}$

    Solución:

    $y' = \frac{(e^x+e^{-x}-2)(x-\mathrm{sen}\, x)-(e^x-e^{-x}-2x)(1-\cos x)}{(x-\mathrm{sen}\, x)^2}$

27. $y = [1 + 2\cos(x.\cos x)]^2$

    Solución: $y' = 2[1 + 2\cos(x.\cos x)].(-2\,\mathrm{sen}(x.\cos x))(\cos x - x.\mathrm{sen}\, x)$

28. $y = 2\ln x^{2x-1}$

    Solución: $y = 2(2x-1).\ln x, y' = 2[2.\ln x + \frac{2x-1}{x}$

29. $y = (3x^2+5)^{3x-1}$

    Solución: $y' = (3x^2+5)^{3x-1}[3.\ln(3x^2+5) + \frac{6x}{3x^2+5}(3x-1)]$

30. $y = (2\,\mathrm{sen}\, x)^{2x-1}$

    Solución:

    $y' = (2\,\mathrm{sen}\, x)^{2x-1}[2.\ln(2\,\mathrm{sen}\, x) + \cot x(2x-1)]$

31. La población de una cierta colonia de insectos crece de acuerdo con la fórmula $y = 1.000^{t+1} - 1.000(t+1)$ donde t es el tiempo en meses e y es el número de individuos de la población. Calcular la velocidad de crecimiento de la población a los doce meses.

    Solución: $\approx 6'9.10^{13}$

32. Calcular la derivada de $y = arc\tan\dfrac{1+x}{1-x} - arc\tan x$ simplificando el resultado al máximo. Interpretar el resultado.

    Solución: 0, es constante

33. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \dfrac{2x^3+9}{4x+1}$ en el punto de abcisa 2.

    Solución: $y - \frac{25}{9} = \frac{116}{81}(x-2)$

34. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ que forman un ángulo de $45^0$ con la parte positiva del eje de abcisas.

    Solución: $y = x, y + \frac{\sqrt{3}}{2} = x + \sqrt{3}, y - \frac{\sqrt{3}}{2} = x - \sqrt{3}$

35. Hallar la ecuación de la curva que pasa por los puntos p(0,3) y Q(-1,4), sabiendo que su derivada segunda es $y'' = 6x - 2$

    Solución: $y = x^3 - x^2 - 3x + 3$

    El enunciado es "Calcular la integral"

36. $\displaystyle\int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1})dx$

    Solución: $\frac{-1}{x} - ar\tan x + C$

37. $\displaystyle\int (x^2 + \frac{1}{x})dx$

    Solución: $\frac{x^3}{3} + \ln|x| + C$

38. $\displaystyle\int (3e^x - 1)dx$

    Solución: $3e^x - x + C$

39. $\displaystyle\int \frac{x+1}{2}dx$

    Solución: $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}C$

40. Derivar $y = (x^2 - 5x + 1)^3$ y luego expresar la primitiva de la derivada obtenida.

    Solución: $y' = 3(x^2-5x+1)^2(2x+5), prim = (x^2-5x+1)^3 + C$

# 10 ESTADISTICA

## 10.1 Introducción

**Fenómeno aleatorio** es aquel en el cual es imposible predecir el resultado en cada realización u observación; ej: lanzar una moneda, extraer una carta de una baraja, número de nacimientos de una ciudad en un mes, etc.

**Estadística Descriptiva** es la parte de las Matemáticas que se ocupa de proporcionar métodos para recoger, organizar, analizar y resumir datos numéricos de fenómenos aleatorios.

**Colectivo o población** es el conjunto de elementos con caracteres comunes.

**Muestra** es un subconjunto o parte representativa de un colectivo.

## 10.2 Variable estadística

Variable estadística es el carácter común que se considera en los elementos del colectivo. Hay dos tipos cuantitativa y cualitativa, según que el carácter sea numérico o no; ej: colectivo: alumnos de un instituto, variable cualitativa color del pelo, variable cuantitativa estatura.

Nos centraremos en las cuantitativas y representaremos por $\{x_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto de valores que toma la variable estadística.

**Frecuencia** de un valor $x_i$ es el número de veces que se presenta, $n_i$.

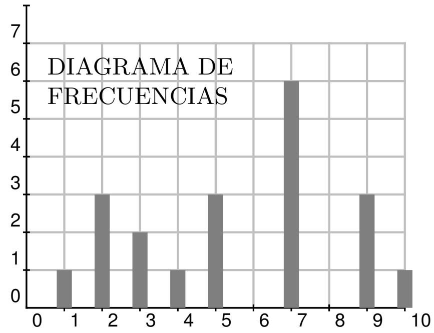
**Frecuencia relativa** de $x_i$ es la frecuencia dividida por el número de elementos, $f_i = \dfrac{n_i}{\Sigma n_i}$

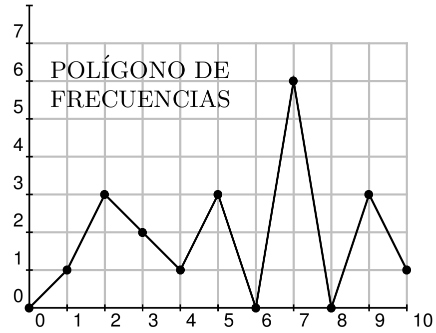
La frecuencia relativa es el tanto por 1, para obtener el porcentaje se multiplica por 100.

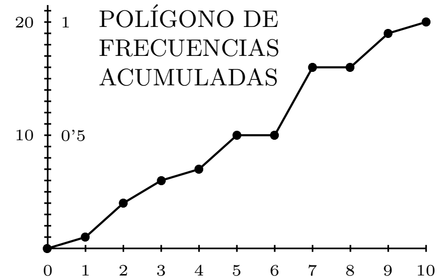
**Frecuencia acumulada** de $x_i$ es la suma de las frecuencias de $x_i$ y de las anteriores $N_i = \Sigma n_j$ con $j \leq i$, $F_i = \Sigma f_j$ con $j \leq i$.

**Ejemplo *** Supongamos que las calificaciones de 20 alumnos vienen dadas por la serie estadística:
2,4,5,9,9,10,7,3,2,5,7,3,7,7,5,1,2,7,7,9

| var.est | frecuencias | frec. rel | frec. acum. | frec .rel. acum. |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $n_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0’05 | 1 | 0’05 |
| 2 | 3 | 0’15 | 4 | 0’20 |
| 3 | 2 | 0’10 | 6 | 0’30 |
| 4 | 1 | 0’05 | 7 | 0’35 |
| 5 | 3 | 0’15 | 10 | 0’50 |
| 6 | 0 | 0 | 10 | 0’50 |
| 7 | 6 | 0’30 | 16 | 0’80 |
| 8 | 0 | 0 | 16 | 0’80 |
| 9 | 3 | 0’15 | 19 | 0’95 |
| 10 | 1 | 0’05 | 20 | 1 |
| | $\Sigma n_i = 20$ | | | |



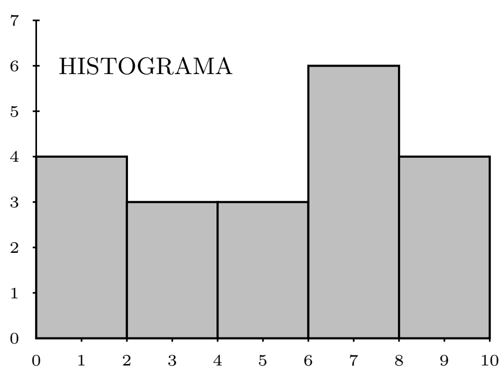

**Agrupamiento en clases** Si interesa porque hay muchos valores distintos, se suelen agrupar los valores en **intervalos de clase** por ej. las tallas de 5 cm en 5 cm, el centro de cada intervalo se llama **marca de clase** y se considera éste como el valor de la variable estadística.

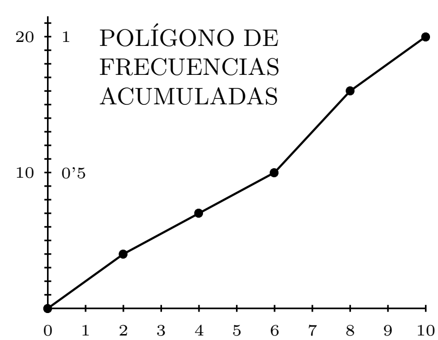
Un criterio para decidir el número de intervalos de clase puede ser el de Norcliffe:

$$\text{n}^0 \text{ de clases} \approx \sqrt{\text{n}^0 \text{ de datos}}$$

En el ejemplo * n$^0$ clases $\approx \sqrt{20} \approx 5$ intervalos iguales, el intervalo total es 10, la longitud de cada intervalo de clase es $10/5 = 2$

| int.clase | marca clase $x_i$ | $n_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| [0,2] | 1 | 4 | 0'20 | 4 | 0'20 |
| (2,4] | 3 | 3 | 0'15 | 7 | 0'35 |
| (4,6] | 5 | 3 | 0'15 | 10 | 0'50 |
| (6,8] | 7 | 6 | 0'30 | 16 | 0'80 |
| (8,10] | 9 | 4 | 0'20 | 20 | 1 |
| | $\Sigma n_i = 20$ | | | | |


Normalmente interesa dar un resumen numérico de los datos de un fenómeno aleatorio. Para ello se requieren dos números: uno que dé un valor medio representativo y otro que indique lo alejados que están los datos entre sí.

Tenemos entonces las medidas de **centralización** que indican valores medios representativos y las de **dispersión** que indican lo separados que están los datos.

## 10.3 Medidas de centralización

Se usa el ejemplo* de las notas de clase.

**Moda** (para datos no agrupados en clases) es el valor de la variable estadística que tiene mayor frecuencia en el ejemplo el 7.

**Mediana** (para datos no agrupados en clases) es el valor central del conjunto ordenado de datos $x_i$, el que deja a la izquierda la mitad de los datos. En el ejemplo: 1 2 2 2 3 3 4 5 5 5*7 7 7 7 7 7 9 9 9 10 la mitad está entre $N_i = 10$ y 11, o sea entre 5 y 7, (pasa cuando es par el número de datos) y se toma la semisuma: mediana $= \dfrac{5+7}{2} = 6$.

**Media** es la media aritmética: se suman todos los datos y se divide por el número de datos.

$$\boxed{\text{media sin frecuencias: } \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N}}$$

Si conviene considerar las frecuencias, como cada dato se sumaría un número de veces igual a su frecuencia resulta:

$$\boxed{\text{media con frecuencias: } \bar{x} = \frac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i}}$$

se añade una columna a la tabla

en el ejemplo: $\bar{x} = \dfrac{111}{20} = 5'55$

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i.n_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 6 |
| 3 | 2 | 6 |
| 4 | 1 | 4 |
| 5 | 3 | 15 |
| 7 | 6 | 42 |
| 9 | 3 | 27 |
| 10 | 1 | 10 |
| | | $\Sigma x_i n_i = 111$ |

## 10.4 Medidas de dispersión

Se usa el ejemplo* de las notas de clase.

**Rango o recorrido** es la diferencia entre los valores más grande y más pequeño, en el ejemplo: $10 - 1 = 9$.

**Desviación media** Desviación de un valor respecto de la media es $x_i - \bar{x}$.

Se llama desviación media a la media de los valores absolutos de las desviaciones. Como los valores absolutos se trabajan mal con calculadora en la práctica se usa:

| $x_i$ | $n_i$ | $x_i - \bar{x}$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | -4,55 |
| 2 | 3 | -3,55 |
| 3 | 2 | -2,55 |
| 4 | 1 | -1,55 |
| 5 | 3 | -0,55 |
| 7 | 6 | 1,45 |
| 9 | 3 | 3,45 |
| 10 | 1 | 4,45 |

**Desviación típica** es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones, se representa por $\sigma$:

$$\boxed{\text{Desviación típica sin frecuencias: } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N}}}$$

$$\boxed{\text{Desviación típica con frecuencias: } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 n_i}{\Sigma n_i}}}$$

La calculadora nos da para el ejemplo: $\sigma = 2'67$.

**Varianza** es el cuadrado de la desviación típica, se representa por $\sigma^2$

En el ejemplo: $\sigma^2 = 7'15$.

Las dos medidas más importantes son la **media** y la **desviación típica**, y nos dicen que si tomamos un alumno al azar lo más probable es que haya obtenido una nota próxima a 5'55 con una diferencia de $\pm 2'67$.

Pero sobre todo sirve para comparar dos variables; si otro curso tiene como media 6'5 y desviación típica 1'2, podríamos afirmar con total seguridad que estos últimos alumnos han sacado mejores notas y que éstas son más uniformes.

**Funciones estadísticas de la calculadora**

| ACCIÓN | TECLAS | PANTALLA |
|---|---|---|
| modo estadístico | MODE . | SD |
| limpiar memoria | SHIFT AC | |
| datos sin frecuencias | $x_i$ M+ | $x_i$ |
| datos con frecuencias | $x_i$ X $n_i$ M+ | $x_i$ |
| borrar dato | C | 0 |
| media | SHIFT $\bar{x}$ | resultado |
| desviación típica | SHIFT $\sigma_n$ | resultado |
| sumatorios, etc | SHIFT tecla | |

**Ejemplos**

1. Calcular la media y la desviación típica de los datos de la tabla adjunta que resume la observación hecha a 30 niños de edad en meses a la que empiezan a andar

   | MESES | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
   |---|---|---|---|---|---|---|---|
   | FRECUENCIA | 1 | 2 | 4 | 13 | 6 | 3 | 1 |

   Introducimos los datos en la calculadora, (las frecuencias son distintas de 1)

   | MESES | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
   |---|---|---|---|---|---|---|---|
   | FRECUENCIA | 1 | 2 | 4 | 13 | 6 | 3 | 1 |

   media $= \bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i} = \dfrac{364}{30} = 12'13$

   desviación típica $= \sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 n_i}{\Sigma n_i}} = 1'26$

2. A dos grupos de ocho profesores de letras (grupo A) y de ciencias (grupo B) se les ha planteado un test de cultura general con cien preguntas, arrojando el siguiente número de contestaciones acertadas:

   | Grupo A | 46 | 48 | 49 | 50 | 50 | 51 | 52 | 54 |
   |---|---|---|---|---|---|---|---|---|
   | Grupo B | 10 | 18 | 30 | 50 | 50 | 70 | 82 | 90 |

   Halla para cada uno de los grupos la media, moda y mediana, así como la desviación típica. Interpreta los resultados.

   Tomamos 1 para las frecuencias

   **Grupo A** media $= \bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{N} = 50$, $\sigma^2 =$ , desviación típica $= \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N}} = 2'29$

   Moda = 50, Mediana = 50

**Grupo B** media $= \bar{x} = 50$, desviación típica $= \sigma = 27'50$

Moda = 50, Mediana = 50

Aunque por término medio son igualmente cultos los de letras que los de ciencias, las culturas de los de letras son muy parecidas ($\sigma = 2'29$) mientras que entre los de ciencias los hay notablemente cultos y notablemente incultos. (Todo ello según el criterio de quien ha inventado los datos de este problema).

## Problemas de Variables Estadísticas

1. Construir una tabla similar a la del primer ejemplo para la serie estadística: número de letras de cada palabra del párrafo: "Fenómeno aleatorio ...... colectivo"

   Solución: media 5'36, moda 2, mediana 5

2. Dada la distribución de frecuencias :

| $x_i$ | $n_i$ |
|---|---|
| 1 | 9 |
| 2 | 22 |
| 3 | 13 |
| 4 | 23 |
| 5 | 8 |
| 6 | 25 |

   a) Constrúyase una tabla en la que aparezcan frecuencias absolutas, relativas y absolutas acumuladas. b) Represéntese mediante un diagrama de barras la distribución dada y su correspondiente polígono de frecuencias.

3. Represéntese mediante un histograma la siguiente distribución de frecuencias:

| $L_{i-1}$ - $L_i$ | $n_i$ |
|---|---|
| 0-10 | 22 |
| 10-20 | 26 |
| 20-30 | 92 |
| 30-40 | 86 |
| 40-50 | 74 |
| 50-60 | 27 |
| 60-70 | 12 |

4. Completar los datos que faltan en la tabla siguiente:

| $x_i$ | $n_i$ | $f_i$ | $N_i$ | $F_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 2 | 0'05 | 2 | 0'05 |
| 13 | 4 | 0'1 | 6 | 0'15 |
| 16 | | | 16 | 0'4 |
| 19 | 15 | | | |
| 22 | 6 | 0'15 | 37 | 0'925 |
| 25 | | | | 1 |

5. Hallar las medidas estadísticas de la distribución de frecuencias del problema 2.

   Solución: media = 3'74, mo = 6, mediana = 4, des.tip. = 1'68, var = 2'83, des.med = 1'45

6. Construir la tabla estadística y calcular la media, varianza y desviación típica para la distribución, (4,3) (5,4) (6,3) (9,2) (10,1), donde la primera coordenada es el valor que toma la variable estadística y la segunda es el número de individuos existentes en la muestra con ese valor.

   Solución: media = 6, mo = 5, mediana = 5, des.tip. = 1'96, var = 3'85

7. Calcular la media y la varianza a partir de la definición para la variable estadística: (2,8) (3,14) (9,2), donde la primera coordenada es el valor que toma la variable estadística y la segunda es el número de individuos existentes en la muestra con ese valor.

8. En un reclutamiento militar se ha tomado una muestra de dieciseis jóvenes obteniéndose las siguientes estaturas en cms. : 172, 161, 168, 182, 167, 179, 175, 198, 180, 166, 164, 174, 185, 177, 191, 173. Escribir la tabla estadística y calcular la media y la desviación típica: a) directamente, b) agrupando los datos en intervalos de 10 cms.

   nota: aunque no lo concreta el problema tomar como extremo más pequeño 160 para unificar: $[160-170)\ldots$

Solución: a) media = 175'75, des. tip. = 9'66; b) media = 176'25, des.tip. = 9'92

9. El número de hijos de 10 familias, seleccionadas aleatoriamente, es el siguiente: 5, 2, 0, 6, 3 ,1, 2, 3, 1, 4. Hallar la mediana y la varianza.

   Solución: media = 2'7, des.tip. = 1'79, mediana = 2'5, var = 3'21

10. Durante el mes de julio, en una determinada ciudad de la costa levantina, se han registrado las siguientes temperaturas máximas: 32, 31, 28, 28, 33, 32, 31, 30, 31, 27, 28, 29, 29, 30, 32, 31, 31, 30, 30, 29, 29, 29, 30, 31, 30, 34, 33, 33, 32, 33, 32 a) Hallar la moda. b) El recorrido y la varianza.

    Solución: moda = 30, 31, media = 30'58, des.tip. = 1'74, var = 3'02, $P_{30}$ = 30, $P_{70}$ = 32

11. Se ha aplicado un test de capacidad espacial, compuesto por 90 preguntas, a 100 alumnos de $5^o$ de EGB, habiéndose obtenido los siguientes resultados:

| num. de pregs. correctas | num. de alumnos |
|---|---|
| $[0, 15)$ | 10 |
| $[15, 30)$ | 15 |
| $[30, 45)$ | 25 |
| $[45, 60)$ | 20 |
| $[60, 75)$ | 20 |
| $[75, 90)$ | 10 |

    a) Hallar la media. b) Hallar la varianza.

    Solución: media = 45'75, des.tip. = 21'98, var = 483'19

12. En una encuesta a 200 personas casadas se les ha preguntado sobre la edad a la que se casaron, obteniéndose la siguiente tabla en la que figuran las edades agrupadas en intervalos:

| edades | num. personas |
|---|---|
| $[20, 24)$ | 33 |
| $[24, 28)$ | 97 |
| $[28, 32)$ | 31 |
| $[32, 36)$ | 20 |
| $[36, 40)$ | 19 |

    Completar la tabla anterior con los representantes de clase, frecuencias acumuladas, etc... Calcular la clase modal, la media, y la desviación típica de la distribución anterior.

    Solución: media = 27'90, des.tip. = 4'65, var = 21'59, clase modal $[24, 28)$

13. En un grupo de sociología se han obtenido las siguientes puntuaciones en un test de habilidad mental:

    50, 23, 45, 36, 56, 34, 56, 67, 45, 34, 23, 45, 23, 67, 54, 21, 34, 43, 12, 78, 36, 49, 53, 27, 66, 31, 45, 22, 33, 44, 48, 53, 57, 77, 31, 23, 47, 52, 33, 37, 64, 21.

    Hallar la media y la desviación típica

    Solución: media = 42'73, des. tip. = 15'938

14. En el departamento de selección de personal de una empresa se ha aplicado un test de inteligencia a los mandos intermedios, obteniéndose los siguientes resultados: 63, 69, 71, 56, 58, 68, 73, 67, 65, 72, 78, 56, 68, 65, 72, 58, 68, 71, 63, 71, 65, 77, 51, 81, 67, 67, 65, 66, 68, 69, 61, 65, 70.

    nota: no agrupar en intervalos

    Solución: media= 66'79, des. tip. = 6'323

15. Las puntuaciones obtenidas por un grupo de alumnos de una guardería en un test de habilidad psicomotora han sido los siguientes:

| puntuaciones | num. de alumnos |
|---|---|
| $[5, 10)$ | 3 |
| $[10, 15)$ | 6 |
| $[15, 20)$ | 13 |
| $[20, 25)$ | 7 |
| $[25, 30)$ | 2 |

    Hallar la media y la desviación típica.

    Solución: moda = 17'7, mediana = 17'5,

16. Se ha aplicado un test de agresividad a 40 alumnos de $7^o$ de EGB,

obteniéndose los siguientes resultados:

| puntuaciones | num. de alumnos |
|---|---|
| $[15, 20)$ | 2 |
| $[20, 25)$ | 8 |
| $[25, 30)$ | 13 |
| $[30, 35)$ | 7 |
| $[35, 40)$ | 6 |
| $[40, 45)$ | 3 |
| $[45, 50)$ | 1 |

a) Hallar la agresividad media por persona.
c) Calcular la desviación típica.

Solución: media = 30, des.tip. = 7'07, var = 50

17. En una serie estadística hemos obtenido las siguientes sumas:

    $\Sigma x_i n_i = 384$, $\Sigma n_i = 22$, $\Sigma(x_i - \bar{x})^2 n_i = 169$

    Hallar la media y la desviación típica:

    Solución: media = 17'45, des.tip. = 2'77

# 11 REGRESION. CORRELACION

## 11.1 Variables estadísticas bidimensionales

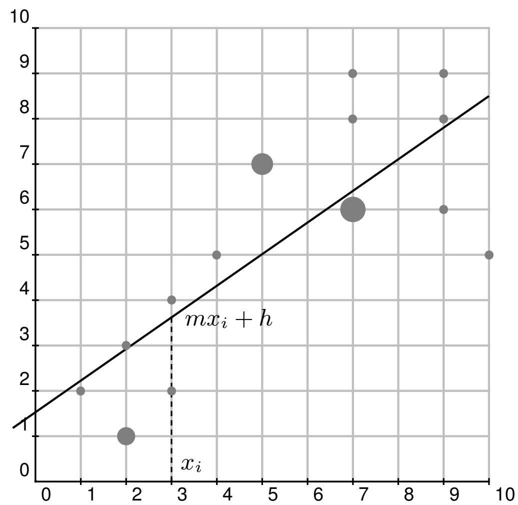
Cuando estudiamos dos variables estadísticas puede interesar ver si están relacionados sus valores, por ejemplo en las calificaciones en dos asignaturas, Física y Matemáticas, de 20 alumnos, cabe esperar que a una nota alta en Física corresponda otra alta en Matemáticas.

Para ello se consideran simultáneamente las dos variables estadísticas, se tiene entonces una **variable estadística bidimensional**.

Consideremos en el ejemplo anterior las calificaciones:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Física: $x_i$ | 2 | 4 | 5 | 9 | 9 | 10 | 7 | 3 | 2 | 5 | 7 | 9 | 7 | 3 | 7 | 7 | 5 | 1 | 2 | 7 |
| Matemáticas: $y_i$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 6 | 5 | 6 | 4 | 1 | 7 | 6 | 8 | 6 | 2 | 8 | 6 | 7 | 2 | 1 | 9 |

Podemos representar en el plano cada pareja de valores, obtenemos así los **diagramas de dispersión** llamados también **nube de puntos**. Estos puntos no se situarán sobre una línea determinada (a diferencia de las funciones, en los que cada valor de una variable determina el valor de la otra), pero cuando hay dependencia entre los valores sí aparece cierta forma en la nube.




Se llama ajuste de la nube de puntos, al problema de encontrar la línea que mejor se adapta a la nube de puntos. Nos limitaremos a encontrar rectas. Una vez halladas nos darán el valor más probable para una de las variables correspondiente a un valor dado de la otra.

**Recta de regresión de $y$ sobre $x$**: Es la recta $y = mx + h$, de manera que el error cometido al tomar como valor $y_i$ correspondiente a $x_i$, el dado por la recta: $y = mx_i + h$ sea mínimo, o sea la recta que hace mínimas las diferencias $y_i - (mx_i + h)$.

$m$ se llama **coeficiente de regresión de $y$ sobre $x$**

## 11.2 Covarianza

Se llama **covarianza** a la media de los productos de las desviaciones de las dos componentes de la variable bidimensional

$$\boxed{\sigma_{xy} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} = \frac{\Sigma x_i y_i}{N} - \bar{x}.\bar{y}}$$

**Ejemplo** En las notas de Física y Matemáticas de los 20 alumnos.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 4 | 5 | 9 | 9 | 10 | 7 | 3 | 2 | 5 | 7 | 9 | 7 | 3 | 7 | 7 | 5 | 1 | 2 | 7 |
| $y_i$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 6 | 5 | 6 | 4 | 1 | 7 | 6 | 8 | 6 | 2 | 8 | 6 | 7 | 2 | 1 | 9 |
| $x_i.y_i$ | 6 | 20 | 35 | 81 | 54 | 50 | 42 | 12 | 2 | 35 | 42 | 72 | 42 | 6 | 56 | 42 | 35 | 2 | 2 | 63 |

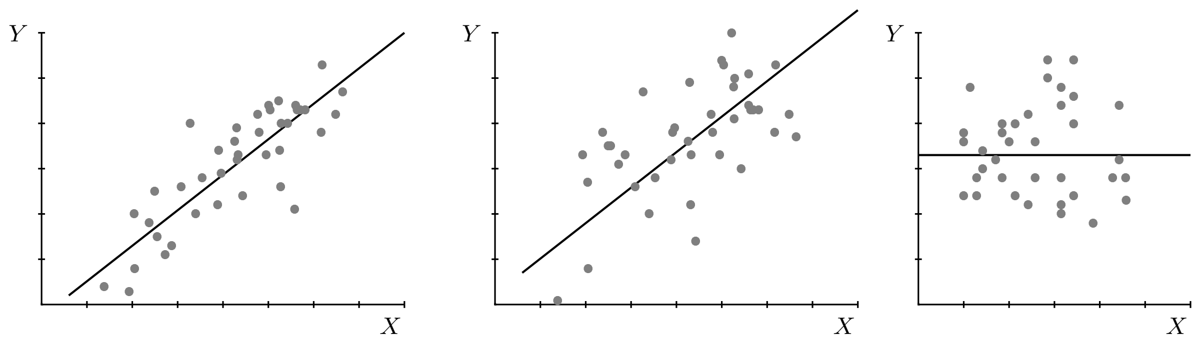
Las medias son: $\bar{x} = 5'55, \bar{y} = 5'40$, resulta: $\sigma_{xy} = \dfrac{\Sigma x_i y_i}{N} - \bar{x}.\bar{y} = 34'95 - 5'55.5'4 = 4'98$

## 11.3 Correlación

Es el grado de mutua dependencia entre las dos variables estadísticas que componen la variable bidimensional.

Cuanto mayor es la correlación más estrecha es la banda en la que se sitúan los puntos de la nube.

CORRELACIÓN CORRELACIÓN PEQUEÑA INCORRELACIÓN




La correlación se mide por el coeficiente de **correlación lineal** (o de Pearson) y viene dado por la covarianza dividida por el producto de las desviaciones típicas: $\boxed{r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y}}$

En el ejemplo, el coeficiente de correlación lineal de la Física y las Matemáticas, cuyas desviaciones típicas son $\sigma_x = 2'67, \sigma_y = 2'43$, resulta: $r = \dfrac{4'98}{2'67 . 2'43} = 0'76$

Se tiene que $r \in [-1, 1]$:

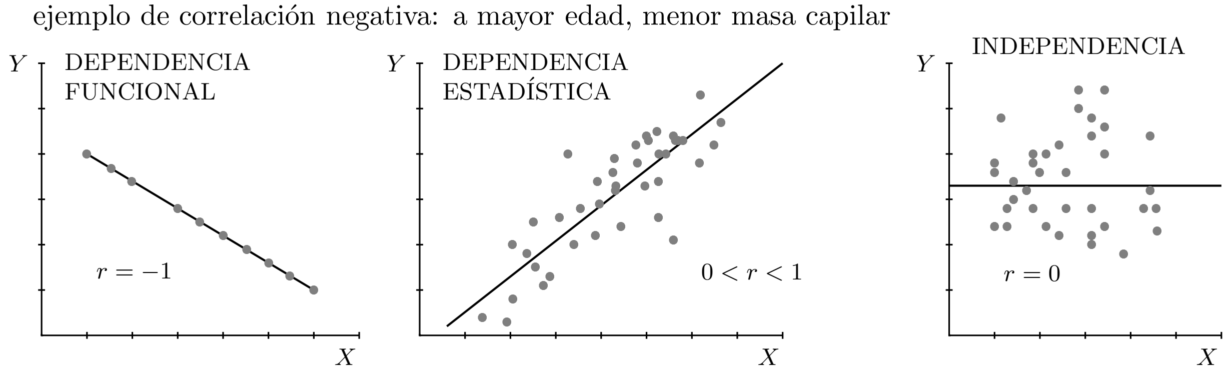
Cuanto más próximo a 1 está $|r|$ mayor es la correlación, más estrecha es la banda en que están los puntos alrededor de la recta de regresión.

Si $r = \pm 1$ entonces hay dependencia funcional, los puntos están en la recta.

Cuanto más próximo a 0 está $r$ menor es la correlación, más redonda es la nube de puntos. Si es 0 hay independencia lineal.

Si $r > 0$ es correlación positiva la recta es creciente Si $r < 0$ es correlación negativa la recta es decreciente

ejemplo de correlación negativa: a mayor edad, menor masa capilar




De todas formas para valorar la correlación hay que tener en cuenta el contexto: así por ejemplo una correlación $r = 0'6$ entre "estaturas" y "pesos" de los soldados de un regimiento es baja; una correlación $r = 0'6$ entre "la nota de matemáticas" y "el número total de horas de estudio a la semana" de los alumnos de una clase es notablemente alta.

### 11.4 Recta de regresión de $y$ sobre $x$

Cuando la correlación es suficientemente alta, tiene sentido considerar la la recta de regresión de $y$ sobre $x$ que pasa por el punto de coordenadas las medias $(\bar{x}, \bar{y})$:

**recta de regresión $y/x$:** $\boxed{y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}.(x - \bar{x})}$

la pendiente es el **coeficiente de regresión de $y$ sobre $x$** y es igual a la covarianza dividida por la varianza de $x$: $y/x : m = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ En el ejemplo: La varianza de la Física es: $\sigma_x^2 = 7'15$ resulta:

recta de regresión de $y$ sobre $x$: $y - 5'4 = \frac{4'98}{7'15}(x - 5'55)$

El **valor esperado** de $y_0$ para un valor dado $x_0$, obtenido a partir de la recta de regresión $y/x$ es más fiable cuanto mayor sea $|r|$ y más próximo a la media de $x$ esté $x_0$. En el ejemplo, el valor esperado para una nota de Física de 5 es de: $y - 5'40 = 0'7(5 - 5'55)$; resulta $y = 5'03$, valor de alto grado de fiabilidad.

## Problemas de Correlación

1. Al aplicar dos tests de memoria a un grupo de alumnos, se han obtenido los siguientes resultados (de uno a diez):

   test I: 3,5,7,4,9,8,7,6,5,3,9,3

   test II: 4,6,8,5,7,7,8,7,6,4,8,5.

   a) Representar el diagrama de dispersión. b) Ajustar aproximadamente una recta a la nube. c) Si un alumno ha obtenido en el test I el resultado 6 qué resultado cabe esperar en el test II.

2. Hacer el problema anterior analíticamente.

   Solución: mediax = 5'75, varx = 4'69, mediay = 6'25, vary=2'02, covar = 2'73, recta $y/x : y - 6'25 = 0'58(x - 5'75)$, $y(6) = 6'3$ en el test II

3. Las notas de Matemáticas y de Física de un grupo de alumnos están dadas por los pares (3,4) (7,6) (5,3) (5,4) (8,7) (7,5) (2,3) (2,2) (8,6). Hallar las rectas de regresión y el coeficiente de correlación entre ambas notas interpretando el resultado.

   Solución: mediax = 5'22, varx = 5'28, mediay = 4'44, vary = 2'47, covar = 3'23, recta $y/x$ : $y - 4'44 = 0'61(x - 5'22)$, r = 0'90

4. Las tasas brutas de natalidad y mortalidad por cada mil habitantes, durante el año 1983, de algunos países de Europa eran las siguientes:

   | | T. nat. | T. mort. |
   |---|---|---|
   | R. D. Alemana | 14 | 13 |
   | Checoslovaquia | 15 | 12 |
   | Dinamarca | 11 | 10 |
   | España | 13 | 7 |
   | Francia | 14 | 10 |
   | Grecia | 14 | 9 |
   | Holanda | 12 | 8 |
   | Irlanda | 20 | 9 |
   | Italia | 11 | 10 |
   | Noruega | 12 | 10 |
   | Portugal | 15 | 9 |
   | Reino Unido | 13 | 12 |

   Estudiar la variable bidimensional que resulta.

   Solución: mediax = 13'67, varx = 5'39, mediay = 9'92, vary = 2'74, covar = -0'106, recta $y/x$ : $y - 9'92 = -0'01(x - 13'67)$, $r = -0'01$

5. El cambio de la moneda de dos naciones respecto al marco alemán ha sufrido las siguientes fluctuaciones:

   1'3; 2'5; 1'2; 1'1; 0'9;

   1'1; 2'3; 0'9; 1'0; 0'8.

   Indica la dependencia comercial y económica de esas dos naciones.

   Solución: mediax = 1'40, varx = 0'32, mediay = 1'22, vary = 0'30, covar = 0'31, r = 0'99, hay correlación muy grande, al ser positiva indica que crecen a la vez, las economías son complementarias de intensa relación comercial

6. Si en el problema anterior se obtuviera un coeficiente de correlación igual a -0'61 ¿como se interpretaría?

   Solución: Hay correlación negativa, no muy grande pero sí significativa. Al ser negativa indica que las economías están en competición: cuando una crece la otra decrece

7. Las estaturas y pesos, en centímetros y kilogramos respectivamente, de un grupo de 6 personas están dadas por:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Estatura (cm) | 168 | 174 | 180 | 175 | 158 | 162 |
| peso (kg) | 65 | 70 | 73 | 68 | 55 | 62 |

   i) Hallar la recta de regresión que sirve para predecir la altura conocido el peso y el coeficiente de correlación entre ambas medidas.

   ii) Predecir la etatura de una séptima persona, afín a las anteriores, que pesa 71 kg. ¿Es fiable la predicción?.

   Solución: mediax = 65'50, varx = 34'25, mediay = 169'50, vary = 58'58, covar = 43'32, r = 0'97, $y - 169'50 = 1'27(x - 65'50)$ , $y(71) = 176'3$. Es fiable porque la correlación es alta y el valor 71 está cerca de la media

8. Dos conjuntos de datos bidimensionales tienen como coeficientes de correlación $r_1$ = -0'87 y $r_2$ = 0'37. a) Razonar en cuál de los dos conjuntos es menor el ajuste (mediante una recta) de una variable en términos de la otra. b) Representar dos conjuntos de puntos cuyas correlaciones se correspondan aproximadamente con las dadas.

9. Hallar el coeficiente de correlación y si es adecuado, en la recta de regresión $y/x$, el valor esperado para x = 8, en una variable bidimensional de la que se conoce: $\Sigma x_i = 666, \Sigma y_i = 2109, \Sigma x_i^2 = 4542, \Sigma y_i^2 = 41939, \Sigma x_i y_i = 13402, N = 111$

   Solución: mediax = 6, mediay = 19, covar = 6'73874, r = 0'74, $y - 19 = 1'369(x - 6)$ .

10. Hallar el coeficiente de correlación y si es adecuado, en la recta de regresión $y/x$, el valor esperado para x = 10, de la variable bidimensional:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 9 | 11 | 14 | 12 |
| $y_i$ | 5 | 9 | 12 | 12 |

   Dibujar la nube de puntos y la recta de regresión.

   Solución: mediax = 11'5, mediay = 9'5, covar = 4'75, r = 0'9173,

11. Hallar el coeficiente de correlación y si es adecuado, en la recta de regresión $y/x$, el valor esperado para x = 47, en la variable bidimensional de la que se conoce: $\Sigma x_i = 219, \Sigma y_i = 347, \Sigma x_i^2 = 8531, \Sigma y_i^2 = 21877, \Sigma x_i y_i = 13617, N = 6$

   Solución: mediax = 36'5, mediay = 57'83, covar = 158'71, r = 0'97, $y - 57'83 = 1'77(x - 36'5)$valor esperado y =76'41 .

# 12 PROBABILIDAD

## 12.1 Introducción

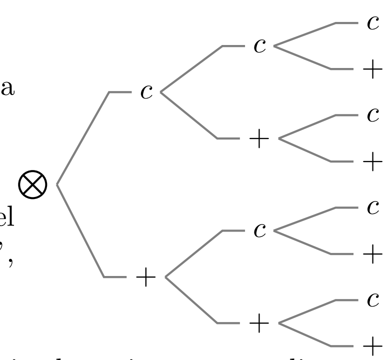
**Fenómeno aleatorio** es aquel en el cual es imposible predecir el resultado en cada realización u observación; ej: lanzar una moneda, extraer una carta de una baraja, número de nacimientos de una ciudad en un mes, etc.

**Cálculo de probabilidades** es el modelo teórico de las regularidades que se observan en los resultados de los fenómenos aleatorios cuando crece el número de pruebas.

## 12.2 Sucesos

El conjunto de todos los resultados asociados a un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** y se suele representar por $E$

**Ejemplo** Escribir el espacio muestral del lanzamiento de una moneda tres veces a) por extensión, b) mediante diagrama en árbol.
a) $E = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++\}$




**Suceso** es todo subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, en el experimento lanzar un dado $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, son sucesos "salir par", "salir menos de 3".

Se dice que un suceso se ha verificado cuando al realizar la experiencia aleatoria correspondiente, el resultado es uno de los elementos de ese suceso. Si al tirar el dado sale un 6 se han verificado, entre otros, los sucesos $\{6\}, \{salir\ par\}, \{5, 6\}, E$.

Los sucesos formados por un solo elemento se llaman **sucesos elementales**, por ejemplo $\{6\}$.
El espacio muestral se llama también **suceso seguro**, el suceso $\emptyset$ se llama suceso imposible.

Hemos considerado los sucesos como conjuntos, por tanto hablaremos de:
**inclusión** $\subset$: $A \subset B$ (se lee $A$ contenido en $B$), si todos los elementos de $A$ están en $B$
**unión** $\cup$: $A \cup B$ se forma juntando los elementos de $A$ y de $B$
**intersección** $\cap$: $A \cap B$ está formado por los elementos comunes a los dos
**complementario** $\bar{A}$: los elementos restantes que no están en $A$.

Existen también denominaciones propias del lenguaje de sucesos:
$A \subset B$ es $A \Longrightarrow B$ (se lee $A$ implica $B$), la verificación del suceso $A$ implica la del suceso $B$; ej $A =$ salir múltiplo de 3, $B =$ salir más de 2.
$A \cup B$ se verifica el suceso $A$ **o** el suceso $B$, se verifica **al menos** uno de los dos
$A \cap B$ se verifica el suceso $A$ **y** el suceso $B$
El complementario $\bar{A}$ del suceso $A$ se llama suceso **contrario**.
Dos sucesos disjuntos, sin ningún elemento común: $A \cap B = \emptyset$ se llaman **incompatibles**.

## 12.3 Frecuencia de un suceso

**Prueba** es cada realización de un experimento aleatorio. Sea un experimento aleatorio del que se han realizado $N$ pruebas. Si el suceso $A$ aparece $n$ veces se dice que en la referida muestra de $N$

pruebas la **frecuencia relativa** del suceso $A$ es $fr(A) = \dfrac{n}{N}$.

Observamos que: (podemos pensar en el lanzamiento 20 veces de un dado: $A$ =salir par)

1) La frecuencia relativa de un suceso está comprendida entre 0 y 1.

2) La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.

3) La frecuencia relativa de la unión de dos sucesos incompatibles es la suma de las respectivas frecuencias: si$A \cap B = \emptyset, \quad fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B)$

Por otro lado si por ejemplo se lanza una moneda 50 veces y salen 28 caras, no tiene por qué ocurrir que al repetir las 50 tiradas vuelvan a salir 28 caras, o sea, las frecuencias relativas suelen variar en cada serie de pruebas.

No obstante al aumentar el número de pruebas se tiene el siguiente resultado práctico llamado **ley del azar**: las frecuencias relativas de los sucesos tienden a estabilizarse alrededor de ciertos números, a estos números se les suele llamar probabilidad de los respectivos sucesos.

## 12.4 Probabilidad

Es el modelo teórico de las frecuencias relativas. Por tanto la probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1 y cumple las condiciones:

1) $p(E) = 1$, la probabilidad del suceso seguro es 1.

2) dados $A, B$ sucesos incompatibles : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, es decir la probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades.

Probabilidad de **Laplace** es la que asigna a cada suceso elemental la misma probabilidad, por tanto la probabilidad de un suceso elemental es $\dfrac{1}{N}$ siendo $N$ el número de sucesos elementales.

Entonces si el suceso $A$ es la unión de $n$ sucesos elementales tendremos:

$p(A) = \dfrac{n}{N}$ o en otras palabras $p(A) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$

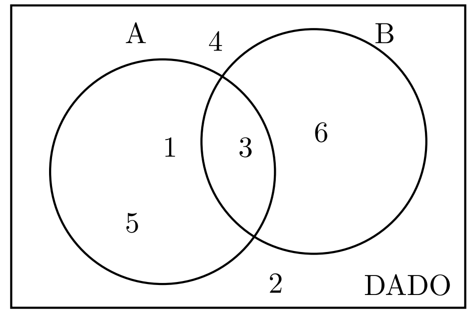
Por ejemplo en la extracción de una carta de una baraja española, la probabilidad de que salga un basto es $p(B) = \dfrac{10}{40}$

Probabilidad **estimada**, empírica o a posteriori de un suceso es la frecuencia relativa de la aparición del suceso cuando el número de observaciones es muy grande.

Por ejemplo a la vista de la producción de un gran número de piezas, una fábrica encuentra que el 20% de los cerrojos producidos por una determinada máquina son defectuosos para unos ciertos requerimientos. Parece lógico asignar una probabilidad 0'2 de obtener un cerrojo defectuoso.

**Propiedades de una probabilidad:**

Se deducen de las condiciones de la definición de probabilidad. Al lanzar un dado podemos pensar en $A$ = "salir impar", $B$ = "salir múltiplo de 3"




1. La probabilidad del suceso imposible es 0: $p(\emptyset) = 0$,
2. Para el suceso complementario se cumple:
$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$
3. Para la unión de dos sucesos cualesquiera se tiene: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

**Ejemplos**

1. Hallar la probabilidad de que salga bastos o figura al sacar una carta de una baraja española (40 cartas).

   $A$ = salir bastos, $p(A) = \dfrac{10}{40}$

   $B$ = salir figura (sota, caballo, rey), $p(B) = \dfrac{12}{40}$

   $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{10}{40} + \dfrac{12}{40} - \dfrac{3}{40} = \dfrac{19}{40}$

2. Una urna contiene 25 bolas blancas de madera, 36 blancas de cristal, 39 bolas rojas en total, y 32 de madera en total.

   a) Hallar el número total de bolas.

   Si se elige al azar una bola:

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja y de madera?.

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca o de cristal?.

   a) Completamos el cuadro:

| | rojas | blancas | |
|---|---|---|---|
| madera | 7 | 25 | 32 |
| cristal | 32 | 36 | 68 |
| | 39 | 61 | 100 |

   Consideremos los sucesos $B$ = extraer bola blanca, $M$ = extraer bola de madera, $R$ = extraer bola roja. Entonces:

   b) $p(B) = 61/100 = 0'61$

   c) $p(R \cap M) = 7/100 = 0'07$

   d) $p(B \cup C) = p(B) + p(C) - p(B \cap C) = 0'93$

3. Una caja contiene 10 piezas, de las cuales 4 son defectuosas.

   I) Hallar la probabilidad de extraer dos defectuosas consecutivas

   a) sin devolver la primera.

   b) devolviendo la primera.

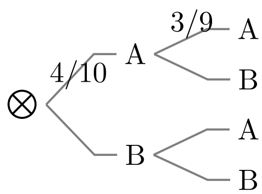
II) Sin devolver la primera, hallar la probabilidad de obtener una de cada tipo.

$A =$ extraer pieza defectuosa ; $B =$ extraer pieza no defectuosa

I) Para hallar la probabilidad de una rama se multiplican las probabilidades de la rama:

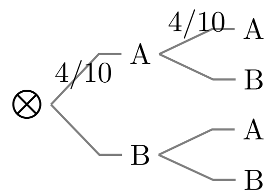
a) Sin devolución, sucesos dependientes va cambiando la probabilidad:

$$p(A_1A_2) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

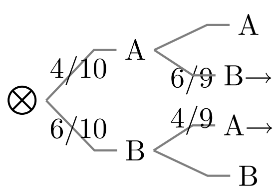



b) Con devolución, sucesos independientes:

$$p(A_1A_2) = \frac{4}{10}.\frac{4}{10} = \frac{4}{25}$$



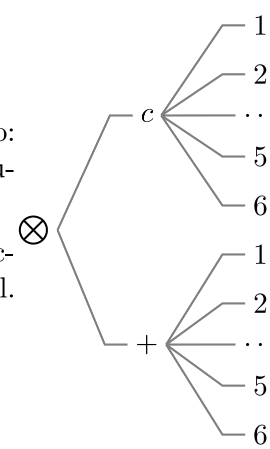

II) Como es la unión de varias ramas, se suman las probabilidades de las ramas favorables:




$$p(\text{una de cada tipo}) = \frac{4}{10}.\frac{6}{9} + \frac{6}{10}.\frac{4}{9} = \frac{24}{45}$$

**Observaciones:**

1. En la extracción de, por ejemplo, dos bolas de una urna es lo mismo: extracción simultánea de las dos, que extracciones sucesivas sin devolución.
2. Experimentos independientes simultáneos es situación análoga a extracción sucesiva con devolución, esto permite utilizar diagrama en árbol. Por ejemplo se lanza un dado y una moneda.




## Problemas de probabilidad

1. Escribir el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de un dado dos veces. a) Mediante diagrama en árbol. b) Por extensión.

2. Escribir el espacio muestral correspondiente a la suma de puntos en el lanzamiento de un dado dos veces. ¿Tiene la misma probabilidad el 8 que el 3?.

3. La clásica ruleta de los casinos consiste en una rueda dividida en 37 compartimentos iguales, numerados de 0 a 36. Al caer en uno de ellos la bola, determina el número premiado. Puede apostarse al número que saldrá de diferentes maneras. He aquí algunas: Si apostamos a IMPAR ganamos en el caso de que salga cualquier número impar; si apostamos a PAR, ganamos si sale

número par distinto de cero, que no se considera par ni impar (al salir cero, gana la banca); apostar a PASSE significa hacerlo a cualquier número superior a 18; apostar a MANQUE significa hacerlo a cualquier número inferior o igual a 18, excluido el cero. Sean P, I, S, M, respectivamente, los sucesos "salir par", "impar", "passe"y "manque". Se pide: a) Describir el conjunto de resultados asociado a una pulsación de la ruleta, así como la probabilidad de cada uno de los resultados posibles. b) Describir por extensión los sucesos P, I, S, M y calcular la probabilidad de cada uno de ellos. c) Describir en términos de P, I, S y M, y por extensión, los sucesos "sale par y manque", "no sale par", "sale impar, pero no passe". Hallar la probabilidad de cada uno de ellos.

Solución: a) 1/37, b) $p(P) = 18/37, p(I) = 18/37, p(M) = 18/37, p(S) = 18/37$, c) $9/37, 19/37, 9/37$

4. En una ciudad el 30% de personas llevan gafas y el 70% fuman. Se elige una persona al azar. Hallar: a) Probabilidad de que fume. b) Probabilidad de que lleve gafas.

   Solución: a) 0'7 b) 0'3

5. Se tiran un dado y una moneda. Hallar la probabilidad de obtener a) cruz y número primo, b) cruz o número primo.

   Solución: a) 1/3, b) 5/6

6. Dada la frase: "Algunos de los que no estudian, también aprueban", elegimos al azar una palabra de ella, hallar la probabilidad de que tenga tres letras.

   Solución: 1/4

7. Un ladrón tiene 7 llaves maestras y quiere abrir una puerta que sólo la abren dos de ellas; como tiene prisa, elige al azar una de las llaves. Hallar la probabilidad de que no abra la puerta.

   Solución: 5/7

8. Una urna contiene 4 bolas blancas numeradas del 1 al 4, 6 negras numeradas del 5 al 10 y 10 rojas numeradas del 11 al 20. Se extrae una al azar. Hallar: a) Probabilidad de que sea roja o blanca. b) Probabilidad de que sea negra y número par. c) Probabilidad de que sea roja y múltiplo de 3. d) Probabilidad de que sea negra o número par.

   Solución: a) 0'7 b) 3/20 c) 0'15 d) d) 13/20

9. Si dos sucesos ligados a una experiencia aleatoria tienen la misma probabilidad y los sucesos elementales son equiprobables, ¿puede deducirse que ambos sucesos son iguales? Razona la respuesta.

10. Se juega a una ruleta numerada de 1 al 100 hallar: a) Probabilidad de que el número que salga sea múltiplo de 10. b) Probabilidad de que el número que salga sea múltiplo de 2 y de 11. c) Probabilidad de que el número que salga sea divisor de 99.

    Solución: a) 0'1 b) 0'04 c) 0'06

11. En una urna hay 3 bolas blancas, 4 negras, 5 rojas y 6 azules. Hallar: a) Probabilidad de que al sacar una bola sea azul. b) Probabilidad de que al sacar dos bolas sean blancas. c) Probabilidad de que al sacar dos bolas sean, la primera negra y la segunda roja.

    Solución: a) 0'3333 b) 0'0196 c) 0'0653

12. Hallar la probabilidad de que al sacar dos cartas de una baraja española: a) sean 2 oros, sin devolver la primera carta. b) sean 2 figuras, devolviendo la primera carta.

    Solución: a) 0'057 b) 0'09

13. En una clase mixta hay 30 alumnas; 15 estudiantes repiten curso de los que 10 son alumnos y hay 15 alumnos que no repiten curso. a) Justificar que el número de estudiantes de esa clase es 55. b) Si se elige al azar un estudiante de esa clase: $b_1$) ¿Cuál es la probabilidad de sea alumno?. $b_2$) ¿Cuál es la probabilidad de que repita curso y sea alumna?. c) Si se eligen dos estudiantes al azar ¿cuál es la probabilidad de que ninguno repita curso?.

    Solución: $b_1$ 0'45, $b_2$ 0'09, c) 0'52

14. La caja $C_1$ contiene 5 fichas azules y 3 rojas, la caja $C_2$ contiene 4 fichas azules y 6 rojas. Se traslada una ficha de la caja $C_1$ a la caja $C_2$; a continuación se extrae una ficha de $C_2$. ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha extraída sea roja?.

    Solución: p(roja extracción $2^a$ caja) = 51/88

15. Se lanzan simultáneamente tres monedas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que todas queden en el suelo del mismo modo?.

    Solución: $p(c) + p(+) = 1/4$

16. Se extraen 3 cartas de una baraja española (40 cartas). Hallar la probabilidad de que sean 3 bastos; a) sin reemplazamiento; b) con reemplazamiento.

    Solución: a) $P[(1B) \cap (2B) \cap (3B)] = 10/40.9/39.8/38 = 0'012$ , b) $P[(1B) \cap (2B) \cap (3B)] = 10/40.10/40.10/40 = 0'015$

17. De una baraja de 40 cartas se toman dos. Hallar la probabilidad: a) De que las dos sean oros. b) De que las dos sean espadas o figuras. c) Al menos una sea sea bastos.

    Solución: a) $p(OO) = 10/40.9/39 = 0'0576$, b) X salir espadas o figura $p(XX) = 19/40.18/39 = 0'21$, c) árbol $p(almenosunbasto) = 0'442$

18. Se lanzan 6 monedas simultáneamente. Calcular la probabilidad de que al menos salga una cara.

    Solución: 0'984

19. Consideremos la baraja española (40 cartas). Extraemos una carta al azar, miramos de que palo es y la devolvemos a la baraja. Repetimos la misma operación cuatro veces seguidas. Se pide: a) Probabilidad de haber sacado dos veces solamente una carta de oros. b) Probabilidad de haber sacado más de dos cartas de bastos. c) Hallar las probabilidades en los dos casos anteriores en el supuesto de que no devolvemos las cartas en cada extracción.

    Solución: a) $6(10/40)^2(30/40)^2$, b) $(10/40)^4 + 4(10/40)^3(30/40)$, c) $c_a = p(2oros) = 6\frac{10}{40}\frac{9}{39}\frac{30}{38}\frac{29}{37}$, $c_b = p(3o4bastos) = \frac{10}{40}\frac{9}{39}\frac{8}{38}\frac{7}{37} + 4\frac{10}{40}\frac{9}{39}\frac{8}{38}\frac{30}{37}$

20. Tres cajas tienen las siguientes composiciones: A = 5 bolas blancas y 2 negras, B = 7 bolas blancas y 1 negra y C = 2 bolas blancas y 8 negras. Se escoge al azar una caja y se extraen dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que las bolas sean del mismo color.

    Solución: $1/3(11/21 + 3/4 + 29/45) = 0'573$

21. Dos niños escriben en un papel una vocal. ¿Cual es la probabilidad de que escriban la misma vocal?

22. De una baraja española (40 cartas) se sacan dos cartas. Encontrar la probabilidad de obtener:

    a) Dos cartas de bastos

    b) Dos cartas del mismo número.

    Responder a las mismas preguntas si la carta primeramente extraída se devuelve antes de la segunda extracción.

23. Una moneda está trucada de forma que la probabilidad de que salga cara es 0'4. Si se lanza 3 veces la moneda encontrar la probabilidad de que salgan dos caras.