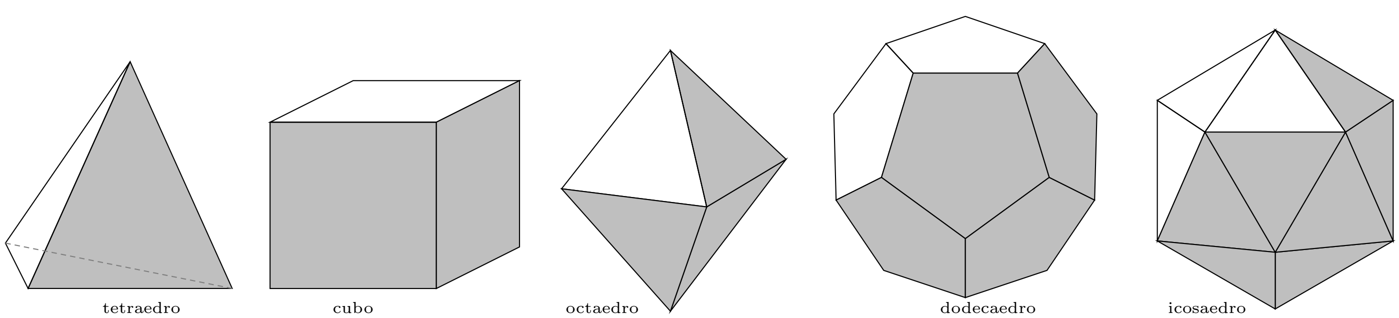
MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS
MATEMÁTICAS
MATEMÁTICAS

CIENCIAS SOCIALES II



10 de septiembre de 2005

Germán Ibáñez

Índice General

1 MATRICES. DETERMINANTES

1.1 Matriz

Matriz de orden $m \times n$ es un cuadro formado por m filas y n columnas de números reales.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz 5×6

Observaciones

1. En un elemento de una matriz el subíndice primero indica su fila y el segundo su columna, a_{hk} es el elemento de la fila h, columna k.
2. Se llama diagonal principal a la formada por los elementos a_{ii}.
3. Se llama matriz fila si está formada por una sola fila (3,-2,0)

   Se llama matriz columna si está formada por una sola columna.
4. Llamaremos matriz triangular a aquella cuyos elementos por debajo de la diagonal principal son 0 $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. Matriz cuadrada es la que tiene igual número de filas que de columnas.
6. Matriz traspuesta de una dada A, es la matriz A' obtenida cambiando filas por columnas, para obtenerla se escribe la 1^a fila como 1^a columna, la 2^a fila como 2^a columna, etc:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

1.2 Operaciones con matrices

1) **Suma**: para sumar dos matrices del mismo orden se suman los elementos correspondientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -5 \\ 8 & -13 \end{pmatrix}$$

2) **Producto por escalar**: se multiplican todos los elementos por el número

$$(-3).\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -15 & 0 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$$

3) **Producto de matrices**: dos matrices son multiplicables si el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda. El producto de una matriz de orden $m \times n$ por una matriz de orden $n \times p$ es una matriz de orden $m \times p$, en la que el elemento del lugar ij se obtiene operando la fila i de la 1^a matriz con la columna j de la 2^a matriz.

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 4} =$$

$$\begin{pmatrix} 2.0+1.1+(-1).2 & 2.0+1.2+(-1).(-5) & 2.1+1.0+(-1).2 & 2.2+1.1+(-1).2 \\ 0.0+3.1+0.2 & 0.0+3.2+0.(-5) & 0.1+3.0+0.2 & 0.2+3.1+0.2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Se verifican las propiedades y consecuencias de fácil comprobación:

1. Asociativa $A.(B.C) = (A.B).C$

   observación El producto no es conmutativo, tampoco entre matrices cuadradas.

   $$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Se llama matriz unidad o identidad a aquella cuyos elementos de la diagonal principal son 1 y los restantes 0. Al multiplicar una matriz por la matriz unidad se obtiene la misma matriz, es el neutro para el producto cuando se puede hacer éste.

   $$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Es distributivo respecto de la suma de matrices. $A.(B+C) = A.B + A.C$

4. La traspuesta del producto es el producto de las traspuestas cambiadas de orden $(A.B)' = B'.A'$

   Ejemplo Hallar la matriz A en la siguiente ecuación matricial $3A - CB' = DI_4$ siendo

   $$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   $$A = \frac{1}{3}(DI_4 + CB')$$

   $$CB' = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 12 & 1 \\ 9 & 6 & 18 & 0 \end{pmatrix}; \quad DI_4 = D \quad D + CB' = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 13 & 0 \\ 7 & 6 & 21 & 0 \end{pmatrix}$$

   $$A = \begin{pmatrix} 10/3 & 7/3 & 13/3 & 0 \\ 7/3 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Utilizando el producto de matrices un sistema de ecuaciones lineales se puede expresar en forma matricial: $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y - 5z = 4 \\ 6x - y = 7 \end{array} \right.$ $\quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ o trasponiendo:

   $$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & -1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1.3 Determinante de una matriz cuadrada

Determinante de una matriz cuadrada A, que se representa $|A|$

Determinante de orden 2 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

Determinante de orden 3

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

Ejemplos Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -1; \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -103; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Propiedades de los determinantes

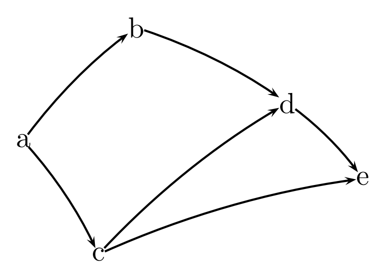
1. Vemos que en cada sumando del desarrollo hay un elemento de cada fila y uno de cada columna.
2. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
3. El determinante de un producto de matrices cuadradas es el producto de los determinantes: $|A.B| = |A|.|B|$.

1.4 Aplicaciones de las matrices

Matriz asociada a un grafo: Dada una relación binaria en un conjunto cuando un elemento a está relacionado con otro b se pone un 1 en el correspondiente lugar de la matriz y 0 en otro caso.

Consideremos el grafo de la figura:

$$M = \begin{array}{c|ccccc} {}^{a}_{de} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



Se llama camino a una secuencia de arcos de tal manera que el vértice final de cada uno sirve de vértice inicial al siguiente. Un camino tiene longitud n si pasa por n arcos, y por tanto, recorre $n+1$ vértices.

Circuito es un camino cerrado en el que el vértice final coincide con el vértice inicial. Se detectan porque aparece 1 en algún elemento de la diagonal principal al hacer las sucesivas potencias de la matriz del grafo.

Ejemplo En el grafo anterior hallar si hay caminos de longitud ≥ 2 y si existen circuitos

$$M^2 = M.M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hay 2 caminos de longitud 2 entre a y d

hay 1 camino de longitud 2 entre a y e
hay 1 camino de longitud 2 entre b y e
hay 1 camino de longitud 2 entre c y e

$$M^3 = M^2.M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hay 2 caminos de longitud 3 entre a y e

$$M^4 = M^3.M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego no hay ningún camino de longitud 4, y al ser matriz nula, indica que el grafo no posee circuitos.

Problemas de matrices

1. Calcular $A'.B - C^2$. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   Solución: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 8 & -6 & -6 \\ 1 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ Hallar la matriz P que verifique

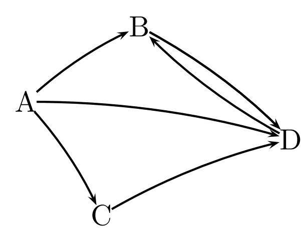
   $P - B^2 = A.B$

   Solución: $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 18 \\ 13 & 10 & 31 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$.

3. Calcular a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

   Solución: a) 2, b) -36, c) -11

4. Hallar la matriz M correspondiente al grafo y calcular $M^2 - M$

   Solución: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Un fabricante produce tres tipos de clavos, de aluminio (A), de cobre (Q) y de acero (H). Todos ellos se fabrican en longitudes 1; 1'5; 2 y 2'5 centímetros con los precios respectivos siguientes:

   Clavos A: 0'20 0'30 0'40 0'50 pts

   Clavos Q: 0'30 0'45 0'60 0'75 pts

   Clavos H: 0'40 0'60 0'80 1 pts

   Sabiendo que en un minuto se producen:

   De 1 cm de longitud: 100 A 50 Q 700 H

   De 1'5 cm de longitud: 200 A 20 Q 600 H

   De 2 cm de longitud: 500 A 30 Q 400 H

   De 2'5 cm de longitud: 300 A 10 Q 800 H

   Se pide:

   i) Resumir la información anterior en 2 matrices, M y N. M es una matriz 3×4 que recoja la producción por minuto y N matriz 4×3 que recoja los precios.

ii) Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz M.N y dar su significado.

iii) Idem para la matriz N.M

Solución:

i)

	1	1'5	2	2'5
A	100	200	500	300
Q	50	20	30	10
H	700	600	400	800

	A	Q	H
1	0'20	0'30	0'40
1'5	0'30	0'45	0'60
2	0'40	0'60	0'80
2'5	0'50	0'75	1

ii) 430 precio de todos los clavos de aluminio, 49'5 de los de cobre, 1760 de los de acero (solo diagonal principal)

iii) 315 precio de los de 1 cm, 429 de 1'5 cm, 538 de los de 2 cm, 957'5 de los de 2'5 cm.

2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

2.1 Sistemas de ecuaciones lineales

Una ecuación es una igualdad en la que aparece una o varias incógnitas:
1)$x^2 - 3x = -2$
2)$3x - 2y + 5z - 3 = 0$

Solución de una ecuación son los números que al sustituir en las incógnitas cumplen la igualdad: en el ejemplo 1) las soluciones son 1 y 2; en el ejemplo 2) $x = 2, y = 4, z = 1$ es una solución pero hay infinitas soluciones dependientes de dos parámetros, pasando por ejemplo la y y la z como parámetros al segundo miembro quedaría: $x = \frac{2y}{3} - \frac{5z}{3} + 1$.

Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones.

Cuando las incógnitas no tienen exponente (o sea tienen exponente 1) se dice que es ecuación lineal.

Se llama sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas a un conjunto de expresiones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

donde las "x"son las incógnitas, y tanto los coeficientes "a"como los términos independientes "c"son números reales.

Consideraremos la matriz: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \ldots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$ matriz asociada al sistema

Se llama **solución del sistema** a toda n-tupla de números que satisfaga las ecuaciones es decir que al sustituir en el sistema verifica todas las ecuaciones.

2.2 Resolución de un sistema por el método de Gauss

Dos sistemas son **equivalentes** si toda solución del primero lo es del segundo y viceversa.

Teniendo en cuenta que al multiplicar los dos miembros de una igualdad por un número la igualdad subsiste, y de que si se suman varias igualdades resulta otra igualdad. Se tienen las siguientes reglas que permiten pasar de un sistema a otro equivalente más sencillo:

1) Se pueden intercambiar dos ecuaciones.
2) Se puede multiplicar (dividir) una ecuación por un número distinto de cero.
3) A una ecuación se le puede sumar (restar) otra.
4) Si hay dos ecuaciones iguales o proporcionales se puede eliminar una.
5) Se puede despejar una incógnita en una ecuación y sustituir el resultado en las demás.
6) Es equivalente trabajar con las ecuaciones del sistema que trabajar con las filas de la matriz asociada.

El método de Gauss consiste en triangular la matriz asociada (conseguir ceros por debajo de la diagonal principal) mediante las operaciones arriba indicadas, de esta manera queda un sistema equivalente de cuya última ecuación se puede despejar una incógnita y luego ir sustituyendo los valores de las incógnitas de abajo arriba. Es un procedimiento particular de reducción.

Resultan las siguientes posibilidades al resolver un sistema:
a) Sistema compatible determinado, es decir, con solución única.
b) Sistema compatible indeterminado, es decir, con infinitas soluciones.
c) Sistema incompatible, es decir, no tiene solución.

Ejemplo Resolver por el método de Gauss

$$\begin{cases} x-2y=-5 \\ 2y+4z=7 \\ x+y-4z=-8 \\ 3y-4z=-3 \\ -x-y+4z=8 \end{cases} \text{ la matriz asociada es } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \\ -1 & -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

se observa que la quinta fila es la $3^a \times (-1)$, la eliminamos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 3^a\text{fila} - 1^a \\ \begin{array}{rrrr} 1 & 1 & -4 & -8 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \end{array} \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \text{ suprimimos}$$

la última fila,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 3^a \times 2 + 2^a \times (-3) \\ \begin{array}{rrrr} 0 & 6 & -8 & -6 \\ 0 & -6 & -12 & -21 \end{array} \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -20 & -27 \end{pmatrix}$$

una vez triangulada volvemos a sistema

$$\begin{cases} x-2y=-5 \\ 2y+4z=7 \\ -20z=-27 \end{cases} \text{ resulta despejando y sustituyendo de abajo hacia arriba}$$

$$z=\frac{27}{20}; \quad y=\frac{7-4\frac{27}{20}}{2}=\frac{4}{5}; \quad x=-5+2\frac{4}{5}=\frac{-17}{5}$$

nota [1]

En la práctica nos limitaremos a sistemas con tres incógnitas como máximo.
Aplicando este método a un sistema cualquiera se llega a una de las situaciones siguientes:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \end{pmatrix} \text{ sis. comp. det. } \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \text{ sis. incompat.}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ o bien: } \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sis. comp. ind., 1 parámetro}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sis. incompat. } \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sis. comp. ind., 2 parámetros}$$

---

[1] El método de Gauss-Jordan consiste en después de triangular la matriz asociada seguir consiguiendo ceros por encima de los elementos corespondientes a las incógnitas, y por último dividiendo por el coeficiente de cada incógnita conseguir que sea uno el coeficiente correspondiente a esa incógnita.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -20 & -27 \end{pmatrix} 2^a \times 5 + 3^a \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 10 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -20 & -27 \end{pmatrix} 2^a/2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -20 & -27 \end{pmatrix} 1^a \times 5 + 2^a \times 2$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -20 & -27 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 5x=-17 \\ 5y=4 \\ -20z=-27 \end{cases}$$

Ejemplos

1. Estudiar y resolver si es posible el sistema

$$\begin{cases} 4x+5y+3z=-4 \\ 4x+y+4z=0 \\ 4x+3y+3z=-5 \\ 4x-3y+5z=4 \\ -2y+z=5 \end{cases}$$ formamos la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & -5 \\ 4 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 2^a-1^a \\ 3^a-1^a \\ 4^a-1^a \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$ eliminamos la 4^a fila que es proporcional a la 2^a

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 3^a(-2)+2^a \\ 4^a(-2)+2^a \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$ eliminamos la 4^a fila $$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

sistema compatible determinado

Para resolverlo queda el sistema equivalente: $$\begin{cases} 4x+5y+3z=-4 \\ -4y+z=4 \\ z=6 \end{cases}$$ que resuelto sustituyendo da: $x=-49/8; y=1/2; z=6$

2. Estudiar y resolver si es posible el sistema

$$\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x-y+3z=-1 \\ -4x+5y-11z=11 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & -11 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 2^a+1^a.(-2) \\ 3^a+1^a.4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -9 \\ 0 & 9 & -15 & 27 \end{pmatrix} 3^a+2^a.3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ eliminamos la última ecuación, sistema compatible indeterminado.

Dejando x e y en el primer miembro y considerando la última matriz resulta: $$\begin{cases} x+y=4+z \\ -3y=-9-5z \end{cases}$$

$$y=\frac{9+5z}{3}; \quad x=\frac{3-2z}{3}; \quad z\in R$$

3. Estudiar y resolver si es posible el sistema

$$\begin{cases} 3x+3y+3z=4 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+2y+z=1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ reordenando } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 2^a+1^a.(-3) \\ 3^a+1^a.(-2) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} 3^a-2^a \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

queda $0z=-1$ como última ecuación: sistema incompatible.

4. Resolver

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ 4x+5y-z=0 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a+1^a.(-2) \\ 3^a+1^a.(-4) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad x=4z; \quad y=-3z; \quad z\in R$$

(un sistema en el que los términos independientes son 0 se llama **homogéneo**)

5. Discutir según los valores de a la compatibilidad del sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} (a+1)x+(a-1)y-(a+1)z=2 \\ ay+z=0 \\ (a+1)x+(2a-1)y-(a-1)z=1 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & -a-1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ a+1 & 2a-1 & -a+1 & 1 \end{pmatrix} 3^a-1^a$$

$$\begin{pmatrix} a+1 & a-1 & -a-1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 & -1 \end{pmatrix} 3^a-2^a \begin{pmatrix} a+1 & a-1 & -a-1 & 2 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad z=-1; \text{ Resulta:}$$

$ay=-z$, si $a\neq 0:\ y=\dfrac{1}{a}$ pues no se puede anular el denominador;

$(a+1)x=2-(a+1)-(a-1)\dfrac{1}{a}=\dfrac{(a+1)(1-a)}{a}$ si $a+1\neq 0:\ x=\dfrac{1-a}{a}$

luego para $a\neq 0, a\neq -1$, es compatible determinado.

para $a=0$, sustituyendo: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ es incompatible

para $a=-1$, sustituyendo: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $z=-1; y=-1; 0x=0, x=\alpha$, compatible indet.

nota: al triangular hay que evitar multiplicar por el parámetro pues pueden aparecer casos fantasma.

2.3 Problemas de sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplos

1. La suma de las edades de un padre y sus dos hijos es 48. Dentro de 10 años, el doble de la suma de las edades de los hijos, excederá en 6 años a la edad del padre. Cuando nació el pequeño, la edad del padre excedía en 6 unidades al triple de la edad que tenía el hijo mayor. Calcula las edades de los tres.

x = edad actual del padre
y = edad actual del hijo mayor
z = edad actual del hijo menor

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=48 \\ 2(y+z+20)-6=x+10 \\ (x-z)-6=3(y-z) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=48 \\ -x+2y+2z=-24 \\ x-3y+2z=6 \end{array}\right.$$

$x=40; y=10; z=-2$

luego el problema no está correctamente planteado pues se habla de edades actuales y el hijo menor no existe.

2. En una reunión, cierta parte de los presentes están jugando, otra parte están charlando y el resto, que es la cuarta parte del total, bailando. Mas tarde, 4 dejan el juego por el baile, 1 la charla por el juego y 2 dejan el baile por la charla, con lo cual, el número de personas que está en cada grupo es el mismo. ¿Cuántas personas componen la reunión?

   x juegan, y charlan, z bailan $\dfrac{x+y+z}{4} = z, \quad x-4+1 = z+4-2 = y-1+2$

   $$\begin{cases} x+y+z=4z \\ x-3=y+1 \\ x-3=z+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-3z=0 \\ x-y=4 \\ x-z=5 \end{cases} \qquad x=11, y=7, z=6$$

3. Los grifos A y B llenan un depósito en 1h 10m. Los grifos A y C lo hacen en 1h 24m. Los B y C en 2h 20m. Calcula el tiempo que tardarán en hacerlo cada uno por separado y los tres a la vez.

   x = flujo en litros/minuto de A
   y = flujo en litros/minuto de B
   z = flujo en litros/minuto de C

   $$\begin{cases} 70x+70y=V \\ 84x+84z=V \\ 140y+140z=V \end{cases} \qquad x=\frac{V}{105}, y=\frac{V}{210}, z=\frac{V}{420}$$

   $T_a.x = V; T_a = 105min, T_b = 210min, T_c = 420min$; todos: $T(x+y+z) = V, T = 60min.$

4. Tenemos 3 lingotes, cada uno de ellos formado por oro, plata y cobre. El primero tiene 65 g de oro, 25 g de plata y 10 g de cobre; el segundo tiene 5 g de oro, 45 g de plata y 50 g de cobre; y el tercero 20 g de oro, 45 g de plata y 35 g de cobre. cada uno de los lingotes se funde teniendo 3 aleaciones. ¿Cuántos gramos de cada aleación debemos tomar para formar otra aleación de 60 g que contenga 15 % de oro, 40 % de plata y el 45 % de cobre?.

   A_1: 1^a aleación, cada gramo tiene 0'65 oro, 0'25 plata y 0'1 cobre

   A_2: 2^a aleación, cada gramo tiene 0'05 oro, 0'45 plata y 0'5 cobre

   A_3: 3^a aleación, cada gramo tiene 0'2 oro, 0'45 plata y 0'35 cobre

   necesitamos x gramos de A_1, y gramos de A_2, z gramos de A_3, $x+y+z=60$

   veamos cuantos gramos de cada metal han de tener los 60 g de aleación final oro: 60.0'15 = 9, plata: 60.0'40 =24, cobre: 60.0'45 = 27

   oro: $x.0'65 + y.0'05 + z.0'2 = 9$
   plata: $x.0'25 + y.0'45 + z.0'45 = 24$
   cobre: $x.0'1 + y.0'5 + z.0'35 = 27$

   $$\begin{cases} x+y+z=60 \\ 65x+5y+20z=900 \\ 25x+45y+45z=2400 \\ 10x+50y+35z=2700 \end{cases}$$

   Simplificamos $\begin{cases} x+y+z=60 \\ 13x+y+4z=180 \\ 5x+9y+9z=480 \\ 2x+10y+7z=540 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 13 & 1 & 4 & 180 \\ 5 & 9 & 9 & 480 \\ 2 & 10 & 7 & 540 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -12 & -9 & -600 \\ 0 & 4 & 4 & 180 \\ 0 & 8 & 5 & 420 \end{pmatrix}$

   dividimos 2^a por 3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -4 & -3 & -200 \\ 0 & 4 & 4 & 180 \\ 0 & 8 & 5 & 420 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -4 & -3 & -200 \\ 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{pmatrix}$

   sería $z=-20$ el sistema es compatible pero la solución no tiene sentido con el enunciado, no es posible efectuar la aleación deseada.

2.4 Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss

Dada una matriz A su inversa es la matriz A^{-1} que verifica $A.A^{-1} = I$

Ejemplo Hallar la inversa de: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Adjuntamos a la derecha la matriz unidad y para evitar el cero en la esquina le sumamos a la primera fila la segunda:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) 1^a + 2^a \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a - 1^a \\ 3^a.3 - 1^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 7 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} 3^a + 2^a.10 \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -11 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1^a.3 + 3^a.2 \\ 2^a.3 - 3^a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 & -19 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -11 & -1 & 3 \end{pmatrix} 1^a + 2^a.2 \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -11 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

dividiendo cada fila por su elemento de la diagonal principal:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 11/3 & 1/3 & -1 \end{array}\right) \text{ las últimas tres columnas es la matriz inversa.}$$

2.5 Sistemas de Cramer

Un sistema se dice que es del tipo Cramer si tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas, y además el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

En un sistema tipo Cramer cada incógnita es igual al determinante formado sustituyendo en el de la matriz de coeficientes su columna por la de términos independientes, partido por el determinante de la matriz de coeficientes.

Ejemplo Resolver el sistema

$$\begin{cases} 4x + 5y + 3z = -4 \\ 4x + y + 4z = 0 \\ 4x + 3y + 3z = -5 \end{cases}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-49}{8}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}}{8} = \frac{1}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{8} = 6$$

Este método puede servir para comprobar resultados y también cuando hay discusión de parámetros:

Ejemplos

1. Discutir según los valores de k el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 2 \\ 5x + 2y - z = 1 \end{cases}$

$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -k & -3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7k + 56$ Para $k \neq -8$ compatible determinado
Para $k = -8$ aplicamos Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a.(-2) + 1^a \\ 3^a.(-2) + 1^a.5 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -4 \\ 0 & -19 & 7 & -2 \end{pmatrix} 3^a - 2^a \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -19 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

queda $0z = 2$ como última ecuación: sistema incompatible.

2. Discutir según los valores de t el siguiente sistema: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ 3x + 3y + tz = 9 \end{cases}$

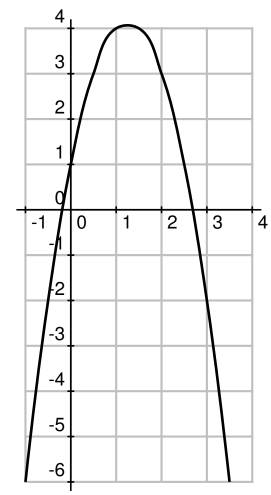
   $|M| = 0$ siempre, no sirve Cramer. Por Gauss el sistema equivale a: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ (t-3)z = 0 \end{cases}$

   Para $t = 3$ queda: $x + y + z = 3$, compatible indeterminado

   Para $t \neq 3$ queda: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$, compatible indeterminado.

3. Hallar el polinomio que pasa por los puntos:

x	-1	1	2
y	-6	4	3



   Planteamos obtener una función polinómica de segundo grado
   $y = ax^2 + bx + c$, resulta el sistema:

   $$\begin{array}{l} y(-1) = -6 \\ y(1) = 4 \\ y(2) = 3 \end{array} \longrightarrow \begin{cases} a - b + c = -6 \\ a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$$

   que tiene solución única y nos da la función $y = -2x^2 + 5x + 1$

Problemas de sistemas

1. Resolver por todos los métodos $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ -3x + 4y = 7 \end{cases}$

   Solución: $x = 29/11, y = 41/11$

2. En una tienda de antigüedades tienen 2 cuadros y una jarra de porcelana. La jarra vale 50 €. Uno de los cuadros más la jarra equivale al cuádruplo del precio del otro cuadro, mientras que este último cuadro y la jarra valen 40 €más que el primer cuadro. ¿Cuánto vale cada cuadro?

   Solución: $x = 30, y = 20$

3. Un peón es contratado en una finca por 200 pesos diarios cuando trabaja mañana y tarde, dándole además de comer. Cuando sólo trabaja por la mañana le dan 125 pesos, ya que no come. Hallar cuántos días trabajó sólo por la mañana, sabiendo que al cabo de un mes recibió 5.100 pesos.

   Solución: 12 días

4. Un muchacho dice "Tengo tantos hermanos como hermanas", y entonces una de sus hermanas dice "tengo hermanos y hermanas en la razón de 3/2". ¿Cuántos hermanos y hermanas son?

   Solución: $\begin{cases} x - 1 = y \\ \frac{x}{y-1} = 3/2 \end{cases}$ $x = 6, y = 5$

5. Para pagar una cuenta de 2.400 rupias un extranjero entrega 9 libras esterlinas y 15 dólares, recibiendo 75 rupias de vuelta. Y

para pagar otra cuenta de 3.200 rupias, otro extranjero entrega 15 libras y 9 dólares y 35 rupias ¿A qué cambio en rupias se han cotizado las libras y los dólares?

Solución: $\begin{cases} 9x+15y=2475 \\ 15x+9y=3165 \end{cases}$, $x=175$ rupias vale cada libra, $y=60$ rupias vale cada dólar.

Resolver por el método de Gauss

6. $\begin{cases} 3x+3y+2z=4 \\ -x+3y+2z=0 \\ 2x+5y+6z=-2 \end{cases}$
Solución: $x=1, y=7/4, z=-17/8$

7. $\begin{cases} -2x+3y+2z=4 \\ -x+3y+z=0 \\ 2x+7y+6z=-2 \end{cases}$
Solución: $x=-25/12, y=-4/3, z=23/12$

8. $\begin{cases} 3x+3y+2z=1 \\ -x+3y-z=0 \\ 2x+5y+z=-2 \end{cases}$
Solución: $x=-26, y=3, z=35$

9. $\begin{cases} -2x+y-2z=3 \\ -6x+6y=6 \\ -2x+3y+2z=1 \end{cases}$
Solución: $x=-2-2z, y=-1-2z$

10. $\begin{cases} 2x-2y+z=1 \\ 5x-4y+3z=1 \\ -5x+6y-2z=-4 \end{cases}$
Solución: $x=-1-z, y=-3/2-z/2$

11. $\begin{cases} -2x-2y+2z=3 \\ -2x-4y+z=8 \\ -2x+2y+4z=2 \end{cases}$
Solución: incompatible

12. $\begin{cases} 3x-4y+z=-4 \\ -x-y+2z=-4 \\ 7x-7y=-4 \end{cases}$
Solución: $x=12/7+z, y=16/7+z$

13. $\begin{cases} -5x-3y+z=0 \\ 2x+3y-4z=4 \\ 3x-4z=-3 \end{cases}$
Solución: $x=-25/21, y=122/63, z=-1/7$

14. $\begin{cases} -x+4y+4z=3 \\ 6x-y=-4 \\ -5x-3y-4z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$
Solución: $x=-3, y=-14, z=14$

15. $\begin{cases} 3x-3y+4z=-3 \\ 2x-y+z=-4 \\ 3x+y+2z=-4 \end{cases}$
Solución: $x=-5/2, y=1/2, z=3/2$

16. $\begin{cases} -2x-3y-3z=1 \\ -2x+4z=4 \\ 3x+3y+z=-3 \\ x+3y+5z=1 \end{cases}$
Solución: $x=2z-2, y=\frac{3-7z}{3}$

17. $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ 2x-3y+4z=3 \\ 5x-4z=2 \\ x-y=3 \end{cases}$
Solución: incompatible

18. Por un kg.de pescado, otro de legumbres y otro de fruta se han pagado 11'2 €. Hallar lo que cuesta cada cosa sabiendo que el kg de legumbres cuesta 0'8 €más que el de frutas y que el kg de pescado vale tanto como uno de legumbres y otro de fruta juntos.

Solución: $x=5'6, y=3'2, z=2'4$

19. Hallar las edades de tres hermanos sabiendo que sumadas dos a dos dan 7, 10 y 13 años.

Solución: 2,5,8

20. Un señor tiene dos hijos, de los cuales uno tiene 6 años más que el otro. Después de 2 años la edad del padre será doble de la suma de las edades de sus hijos, y hace 6 años su edad era 4 veces la suma de las edades de sus hijos. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Solución: padre: 54, hijo 1^0: 15, hijo 2^0: 9

21. Hallar un número de tres cifras, sabiendo que la diferencia entre este y el que resulta de invertir el orden de sus cifras es 198, la cifra de las centenas más la cifra de las decenas y la de las unidades es 6.

Solución: indet, 240, 321, 402

22. Un peatón sube las cuestas a 3 km/h, baja a 8 km/h y va por el llano a 6 km/h. Para ir de A a B, que distan 11 kms. tarda $1+\frac{23}{24}$ h y en volver tarda $2+\frac{7}{12}$ h. Hallar las longitudes de los tramos de cada tipo que hay entre A y B.

Solución: velocidad = espacio/tiempo $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{8}+\frac{z}{6}=\frac{47}{24} \\ \frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=\frac{31}{12} \\ x+y+z=11 \end{cases}$, $x=2, y=5, z=4$

23. El salario medio percibido por los empleados de una empresa es de 800 €El salario medio de los empleados varones de la misma es de 850 €y el salario medio de las empleadas mujeres es de 780 €. Determinar la proporción de hombres y mujeres que trabajan en la empresa.

    Solución: proporcion 2h/5m

24. En un servicio de taxi se abona una cantidad inicial fija (bajada de bandera) y un tanto por km recorrido. Si una carrera de 2 km cuesta 2'30 libras y otra de 5 km 4'25 libras, averiguar cuánto cuesta una carrera de 3 km y cuánto cuesta la bajada de bandera.

    Solución: bajada bandera 1'00 libras, carrera 3 km 2'95 libras

25. Resolver el sistema $\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$ ¿Es posible sustituir el término independiente 9 de la primera ecuación por algún otro número de forma que el sistema obtenido no tenga solución?

    Solución: $x=1, y=2, z=3$, siempre será comatible determinado

26. Explicar en qué consiste el método de Gauss para la resolución de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas.

27. Un estado compra 540.000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 27, 28 y 31 $ el barril, respectivamente, la factura total asciende a 16 millones de $. Si del primer suministrador recibe el 30% del total del petróleo comprado. ¿Cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?

    Solución: 162000 barriles de 27 $, 30667 de 28 $, 347333 de 31 $

28. Discutir según los valores del parámetro: $\begin{cases} 2x+3y-4z=1 \\ 4x+6y-tz=2 \\ x+y+tz=10 \end{cases}$

    Solución: $t \neq 8$ sist comp. det, solución única; $t=8$ sist comp indet infinitas soluciones

29. Discutir y resolver según los valores del parámetro: $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+2y-z=0 \end{cases}$

    Solución: bajar parámetro a la última, $a \neq -8$ sist comp det, solución trivial 0; $a=-8$, compatible indet $x=z/19, y=7z/19$

30. En un hotel, al vender pesetas pagadas en francos, aplican una comisión fija por cada operación y un precio determinado de la peseta, expresado en francos. En una operación, por 5.772 rupias, cobran 300 francos en total. En otra, por 16.497 rupias cobran 850 francos. ¿Cuántas pesetas darán por 1.245 francos?

    Solución: $y=ax+b$, 24199'5 rupias

31. Dados los puntos (-1,4), (1,-2) y (5,3). Hallar y representar aproximadamente:

    a) La recta que pasa por los puntos 1^0 y 3^0.

    b) La parábola que pasa por los tres puntos.

    Solución: a)$y=-\frac{-1}{6}x+\frac{23}{6}$ b) $y=\frac{17}{24}x^2-3x+\frac{7}{24}$

3 PROGRAMACIÓN LINEAL

3.1 Desigualdades e inecuaciones

Las desigualdades son:

$<$ ... menor que ...	$\leq$ ... menor o igual que ...
$>$ ... mayor que ...	$\geq$ ... mayor o igual que ...

Propiedades de las desigualdades y aplicación a la resolución de inecuaciones:

1^a Si se suma o se resta un número a los dos miembros de una desigualdad, resulta otra desigualdad del mismo sentido.

Aplicación: Transposición de términos: un término con $+$, pasa con $-$, y un término con $-$, pasa con $+$.

Ej. $2x - 5 < 5x - 2; \quad 2x - 5x < 5 - 2$

2^a **A)** Si se multiplican o dividen los dos términos de una desigualdad por un número positivo, resulta otra desigualdad del mismo sentido.

Ej. $-5 \leq 2; \quad -5 \times 3 \leq 2 \times 3; \quad -15 \leq 6$

2^a **B)** Si se multiplica o divide los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, resulta otra desigualdad de sentido contrario. Ej. $-5 < 2; \quad -5 \times (-7) < 2 \times (-7); \quad 35 > -14$

Aplicación: Quitar denominadores, multiplicando por el m.c.m, de los denominadores.

Ej. $\dfrac{2x-3}{5} \leq 1 - \dfrac{7}{2} + \dfrac{x}{10}$ multiplico por 10 (positivo) y queda: $4x - 6 \leq 10 - 35 + x$

Aplicación: Despejar la x pasando su coeficiente al otro miembro.

Ej. $5x < 12$ divido por 5 (positivo) $x < \dfrac{12}{5}$

Ej $-3x < -7$ divido por -7 (negativo) $x > \dfrac{-7}{-3}$

Inecuaciones lineales con una incógnita Ejemplo resolver:

$$\frac{x-1}{-3} - \frac{2x+3}{2} \leq x$$
$$\frac{-x+1}{3} - \frac{2x+3}{2} \leq x$$
$$-2x + 2 - 6x - 9 \leq 6x$$
$$-2x - 6x - 6x \leq 9 - 2$$
$$-14x \leq 7$$
$$x \geq \frac{-7}{14}$$
$$x \geq \frac{-1}{2}$$

3.2 Inecuaciones lineales con dos incógnitas. Semiplanos.

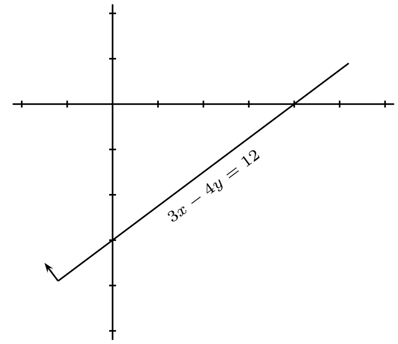
Son expresiones de la forma $ax + by > c$.
Su representación gráfica es un semiplano cuya frontera es la recta $ax + by = c$.

Para ver cual de los dos semiplanos es el solución se estudia si un punto es solución (por ejemplo el origen), en caso afirmativo su semiplano es el semimplano solución.
La frontera está incluida en la solución si la desigualdad es no estricta.

Ejemplo Resolver $3x - 4y \leq 12$

x	0	4
y	-3	0

Probamos el origen: $3.0 - 4.0 \leq 12$ sí es solución.

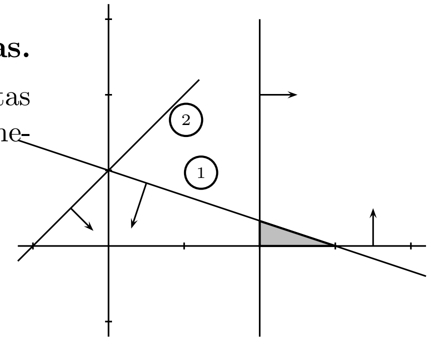


3.3 Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

La solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas vendrá dada por la intersección de los semiplanos solución de cada inecuación. Se llama **Región factible**.

Ejemplo Resolver:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 3 & (1) \\ x \geq 2 & \\ x - y + 1 \geq 0 & (2) \\ y \geq 0 & \end{cases}$$

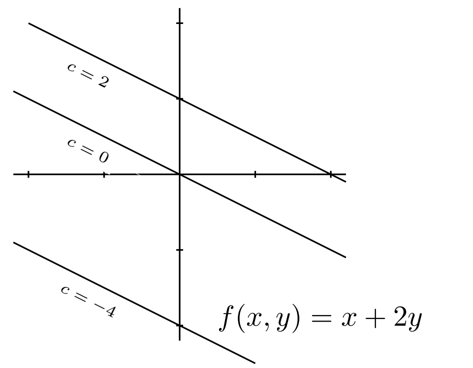


3.4 Función lineal de dos variables

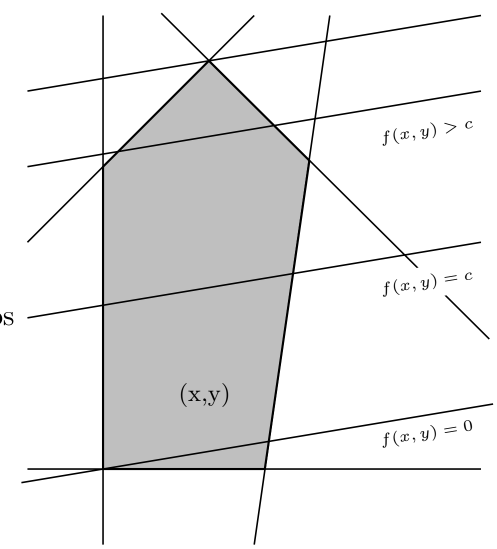
Es de la forma $f(x, y) = ax + by$.

El conjunto de los puntos (x, y) que verifican $f(x, y) = c$ es la recta $ax + by = c$, al variar c obtenemos rectas paralelas.

Si los valores de x e y están restringidos a un cierto conjunto C, la función no podrá tomar cualquier valor y entonces cabe hablar de valores máximo y mínimo de $f(x, y)$ en el conjunto C. Se tiene que:

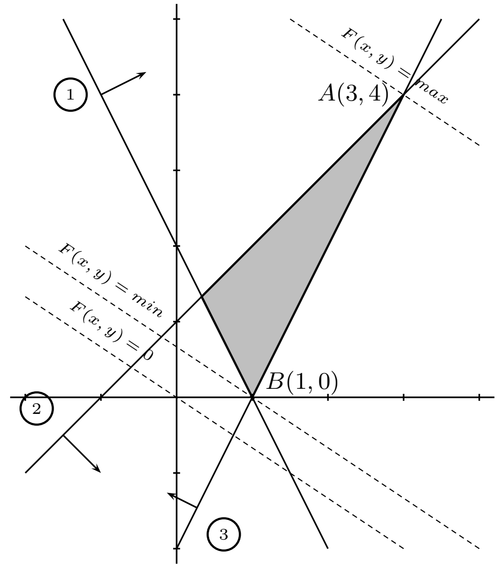


El máximo o el mínimo de una función lineal se alcanza en puntos de la frontera



Ejemplo Dado el conjunto solución del sistema:

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x+y\geq 2 & (1)\\ -x+y\leq 1 & (2)\\ 2x-y\leq 2 & (3)\end{array}\right.$$ hallar si la función
$F=2x+3y$ posee máximo y mínimo en él.



Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:

$F(x,y)=0 \quad 2x+3y=0$

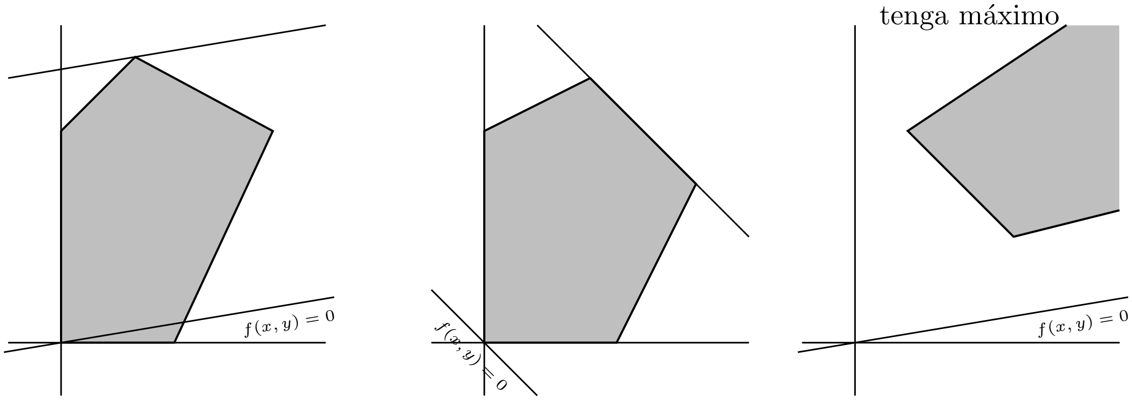
x	0	-3
y	0	2

Para hallar el máximo observamos cual es la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada mayor en el origen: es la que pasa por A.

Para hallar el mínimo observamos cual es la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada menor en el origen: es la que pasa por B.
$A\ :\ f(3,4)=18$ máximo; $\quad B\ :\ f(1,0)=2$ mínimo

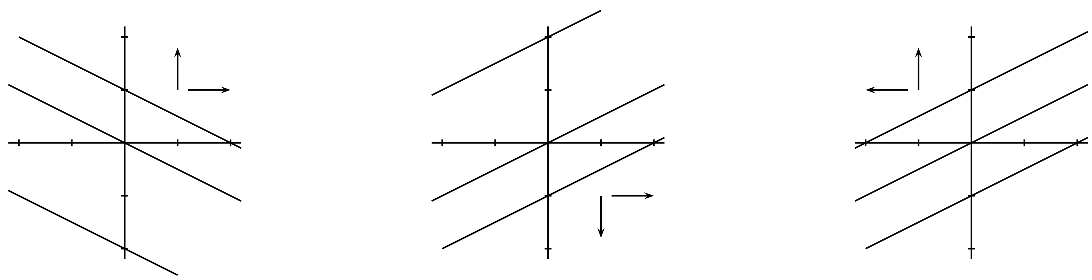
Casos posibles al maximizar una función lineal

una solución	infinitas soluciones	no hay punto donde la función tenga máximo



Según los signos de los coeficientes de x y de y se observa cual es al dirección en que aumenta la función: C aumenta para:

x +2y = C	x -2y = C	-x +2y = C
derecha arriba	derecha abajo	izquierda arriba



3.5 Problemas de programación lineal con dos variables

Estos problemas pretenden optimizar (buscar el máximo o mínimo) una función lineal $F(x,y) = ax + by$, llamada función objetivo, cuando las variables están sometidas a restricciones dadas por inecuaciones lineales (eventualmente también por ecuaciones lineales), llamadas relaciones de ligadura.

Para ello representamos la región del plano determinada por las relaciones de ligadura y buscamos el punto de la frontera para el que la función objetivo se optimiza. Esto se hace, bien analíticamente (sustituyendo los valores extremos en la función objetivo), bien gráficamente viendo la paralela a la recta $F(x,y) = 0$ que toca a un punto extremo para el que se optimiza.

Pueden tener solución única (un punto), múltiple (los puntos de un segmento) o no tener solución (cuando la región no está acotada por la parte que se quiere optimizar).

Ejemplos

1. Una fábrica de bombones tiene almacenados 500 kg de chocolate, 100 kg de almendras y 85 kg de frutas. Produce dos tipos de cajas: la de tipo A contiene 3 kg de chocolate, 1 kg de almendras y 1 kg de frutas; la de tipo B contiene 2 kg de chocolate, 1'5 kg de almendras y 1 kg de frutas. Los precios de las cajas de tipo A y B son 13 y 13'50 euros, respectivamente. ¿Cuántas cajas debe fabricar de cada tipo para maximizar su venta?

1) Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

$x = n^0$ de cajas tipo A

$y = n^0$ de cajas tipo B. Ganancia: $F(x,y) = 13x + 13'50y$

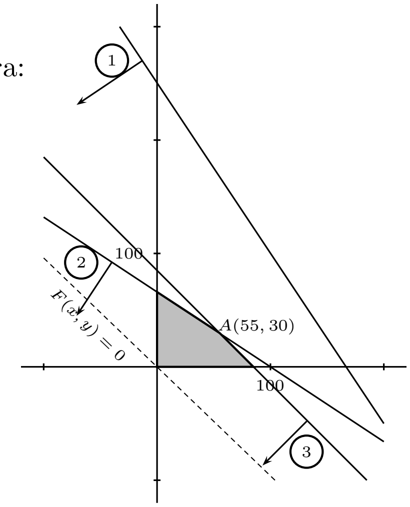
chocolate: $3x+2y \leq 500$ (1) $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 166'6 \\ \hline y & 250 & 0 \end{array}$

almendras:

$x + 1'5y \leq 100$ (2) $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 100 \\ \hline y & 66'6 & 0 \end{array}$

frutas: $x + y \leq 85$ (3) $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 85 \\ \hline y & 85 & 0 \end{array}$

además: $x \geq 0$ $y \geq 0$ pues x e y no pueden ser negativas



2) Representamos el conjunto solución del sistema de inecuaciones y trazamos la recta:

$F(x,y) = 0$ $13x + 13'50y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -135 \\ \hline y & 0 & 130 \end{array}$

Buscamos la paralela que pasa por un vértice y da una ordenada mayor en el origen: es la que pasa por el vértice intersección de

$\left\{ \begin{array}{l} x + 1'5y = 100 \\ x + y = 85 \end{array} \right.$ es $(55, 30)$

Luego para obtener la mayor ganancia el fabricante deberá producir 55 cajas de tipo A y 30 de tipo B.

La ganancia será entonces: $F(55,30) = 13.55 + 13'50.30 = 1120$ euros.

2. El veterinario recomienda a un ciego que, durante un mes, el perro tome diariamente 4 unidades de hidratos de carbono, 23 de proteínas y 6 de grasas. En el mercado se encuentran dos marcas, M_1 y M_2, ajustadas a la siguiente distribución de principios nutritivos:

	H	P	G	Precio	n^0 de latas
M_1	4	6	1	100	x
M_2	1	10	6	160	y

¿Cómo deberá combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? (Problema de la dieta)

Planteamos la función objetivo y las relaciones de ligadura:

Función objetivo a minimizar

precio: $F = 100x + 160y$

hidratos: $4x + y \geq 4$ (1) $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 4 & 0 \end{array}$

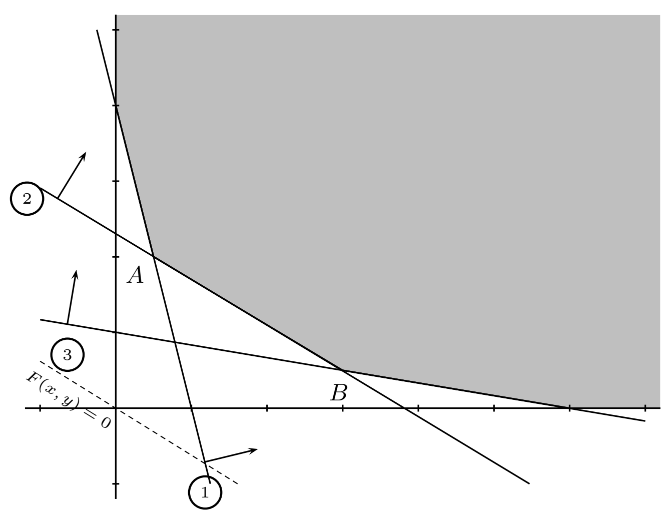
proteínas: $6x + 10y \geq 23$ (2) $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 3'8 \\ \hline y & 2'3 & 0 \end{array}$

grasas: $x + 6y \geq 6$ (3) $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 6 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}$

además: $x \geq 0$ $y \geq 0$

Función objetivo:

$100x + 160y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -160 \\ \hline y & 0 & 100 \end{array}$



Como no se ve con claridad en la figura en qué punto de la frontera corresponde el mínimo comprobamos el valor de F en los dos puntos extremos A y B

$F(\frac{1}{2}, 2) = 370, \quad F(3, \frac{1}{2}) = 380$

luego la solución más barata es emplear media lata de la marca M_1 combinada con dos de la marca M_2 al día. Con lo que se obtiene:

$4.\frac{1}{2} + 2 = 4 \geq 4$
$6.\frac{1}{2} + 10.2 = 23 \geq 23$
$\frac{1}{2} + 6.2 = 12'5 \geq 6$

Se aprovechan al máximo los dos primeros principios alimenticios porque el punto extremo que proporciona el mínimo es la intersección de las fronteras de sus dos condiciones y aunque sobra del tercero, se obtiene la máxima economía.

Problemas de Programación Lineal

1. Resolver a) $5x - 3 \leq \dfrac{14x + 7}{2}$

   b) $3 - 2x \geq \dfrac{5 - 3x}{4}$

2. Representar el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente las desigualdades

   $x + y - 3 \leq 0$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$
   $x - y + 2 \geq 0$

3. Representar el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente las desigualdades

   $2x - y \geq -2$
   $x - y \geq -2$
   $x \leq 1$
   $2x - y \leq 3$

4. Minimizar la función z = 12x + 4y sujeta a las siguientes restricciones:

   $x + y \geq 2$
   $x \leq 1/2$
   $y \leq 4$
   $x - y \leq 0$

   Solución: $P(-2, 4)$

5. Maximizar la función z del ejercicio anterior con las mismas restricciones.

   Solución: $P(1/2, 4)$

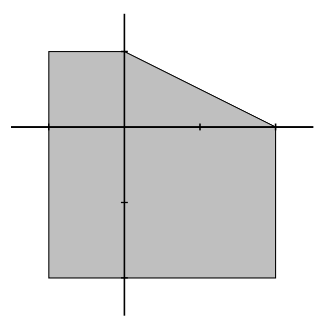
6. Hallar las parejas de valores no negativos (x,y) que minimizan la función z = 3x + 2y, con las siguientes restricciones:
   $7x + 2y \geq 14$
   $4x + 5y \geq 20$

   Solución: $Q(10/9, 28/9), z(Q) = 86/9$

7. Minimizar la función $z = 500.000x + 400.000y$, con las siguientes restricciones:
   $12x + 5y \leq 120$
   $6x + 8y \leq 180$
   $5x + 10y \leq 100$
   $x + y \geq 7$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$

   Solución: $z(0, 7) = 2.800.000$, infinitas

8. Maximizar y minimizar $z = 100x - 150y$ en la región representada. Hallar el sistema de inecuaciones correspondiente.



9. Una compañía tiene dos minas. La mina A produce diariamente una tonelada de carbón de antracita de alta calidad, 2 toneladas de carbón de calidad media y 4 toneladas de carbón de baja calidad. La mina B produce 2 toneladas de cada una de las tres clases. La compañía necesita 70 toneladas de carbón de alta calidad, 130 de calidad media y 150 de baja calidad. Los gastos

diarios de la mina A ascienden a 150 \$ y los de la mina B a 200 \$. ¿Cuántos días deberán trabajar en cada mina para que la función de coste sea mínima?.

Solución: $x = 60$ días en A, $y = 5$ días en B, coste mínimo $F(60,5) = 10.000$pts

10. Un frutero necesita 16 cajas de naranjas, 5 de plátanos y 20 de manzanas. Dos mayoristas pueden suministrarle para satisfacer sus necesidades, pero sólo venden la fruta en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de naranjas, 1 de plátanos y 2 de manzanas. El mayorista B envía en cada contenedor 2 cajas de naranjas, una de plátanos y 7 de manzanas. Sabiendo que el mayorista A se encuentra a 150 km de distancia y el mayorista B a 300 km, calcular cuantos contenedores habrá de comprar a cada mayorista, con objeto de ahorrar tiempo y dinero, reduciendo al mínimo la distancia de lo solicitado.

    Solución: $x = 3$ contenedores, $y = 2$ contenedores, $F(3,2) = 1050$ km mínima distancia

11. Una persona puede invertir hasta 1 millón de euros. Su asesor fiscal le sugiere que invierta en dos tipos de acciones A y B. Las acciones A implican algo de riesgo, pero tienen un rendimiento anual del 10%, mientras que las acciones B son más seguras pero su rendimiento es del 7%. El inversor decide invertir como máximo 600.000 euros en las acciones A y por lo menos 200.000 euros en las acciones B. Además decide que lo invertido en A sea por lo menos igual a lo invertido en B. ¿Cómo debe realizar su inversión para que sus ganancias anuales sean máximas?.

    Solución: 600.000 euros en A, 400.000 euros en B

12. Una fábrica de automóviles y camiones tiene dos talleres. En el taller A para hacer un camión deben trabajar 7 días-operario, en cambio para fabricar un automóvil se precisa 2 días-operario. En el taller B invierten 3 días-operario tanto en la terminación de un camión como en la de un automóvil. Debido a las limitaciones de hombres y maquinaria, el taller A dispone de 300 días-operario, mientras que el taller B dispone de 270 días-operario. Si el fabricante obtiene una ganancia de 60.000 euros en cada camión y 20.000 euros en cada automóvil, ¿cuántas unidades de cada uno deberá producir la fábrica para maximizar su ganancia?

    Solución: $x = 24$ camiones, $y = 66$ coches, $F(24,66) = 2'76$ millones de euros

13. Un artesano dispone de 6 unidades de mimbre y trabaja 28 horas a la semana. Fabrica sombreros y cestos. Cada sombrero necesita 1 u. de mimbre y 8 horas de trabajo, cada cesto 2 u. de mimbre y 7 horas de trabajo. Gana por cada sombrero 80 u. m. y por cada cesto 120 u.m. ¿Cuántas unidades de cada producto debe fabricar a la semana si desea maximizar sus ingresos?

    Solución: max para $(14/9, 20/9)$; 3 cestos, 0 sombreros

14. En una encuesta realizada por una televisión local se ha detectado que un programa con 20 min. de variedades y un minuto de publicidad capta 30.000 espectadores, mientras que otro programa con 10 min. de variedades y un minuto de publicidad capta 10.000 espectadores. Para un determinado período, la dirección de la red decide dedicar 80 min. a variedades y los anunciantes 6 min. de publicidad. ¿Cuántas veces deberá aparecer cada programa con objeto de captar el máximo número de espectadores?

    Solución: $x = 4$ veces, $y = 0$ veces, $F(4,0) =$ 120.000 espectadores

15. En la elaboración de un producto A se necesita una sustancia B. La cantidad de A obtenida es menor o igual que el doble de B utilizada, y la diferencia entre las cantidades del producto B y A no supera los 2 g mientras que la suma no debe sobrepasar los 5 g. Además se utiliza por lo menos 1 g de B y se requiere 1 g de A. La sustancia A se vende a 5 millones y la B cuesta 4 millones el gramo. Calcular la cantidad de

sustancia B necesaria para que el beneficio sea máximo.

Solución: $x = 4, y = 1, F(4,1) = 16$ millones

16. Un abono para jardines ha de tener como mínimo 15 gr de un componente químico líquido y 15 gr de otro componente sólido por m^2. En el mercado se encuentran dos clases de abono: el tipo A, que contiene 10% del componente líquido y 50% del sólido, y el tipo B, que contiene 50% del componente líquido y 10% del sólido. El precio del tipo A es de 10 euros y el tipo B es de 30 euros. ¿Qué cantidades han de comprarse de cada tipo para cubrir las necesidades de un jardín de 500 m^2 con un coste mínimo?

Solución: $x =$ 25gr/m^2 tipo A, y =$25 gr/m^2$ tipo B, 500 m^2, 12500 gr para A, 12500 gr para B

4 DERIVADAS

4.1 Derivada de una función en un punto

Sea una función real $f(x)$ definida en el dominio D, subconjunto de R. Se define derivada de la función $f(x)$ en el punto $x_0 \in D$ como:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

cuando este límite es un número.

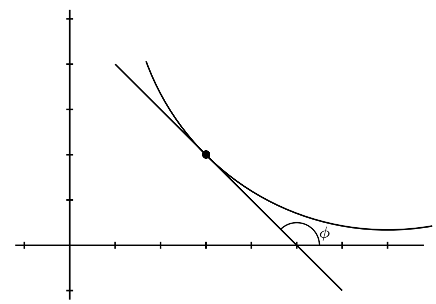
Ejemplos Veamos si las funciones siguientes son derivables en los puntos que se indican

1. $y = x^2 + 3$ en $x_0 = 5$

   $$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(5+h)^2 + 3 - (5^2 + 3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 10h}{h} = 10$$

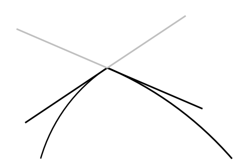
2. $y = \dfrac{1}{x+2}$ en $x_0 = 3$

   $$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{3+h+2} - \frac{1}{3+2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(5+h)5} = \frac{-1}{25}$$

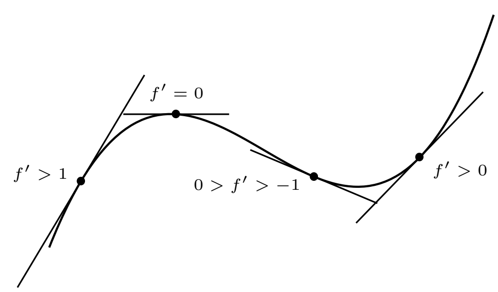


La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto.

$$f'(x_0) = \tan \phi = m$$



Cuando la función hace un pico quiere decir que la derivada es distinta según nos acerquemos por un lado u otro al punto, entonces se dice que la función no es derivable. Si en un punto no es continua tampoco es derivable. Por tanto la gráfica de una función continua y derivable cambia de dirección suavemente



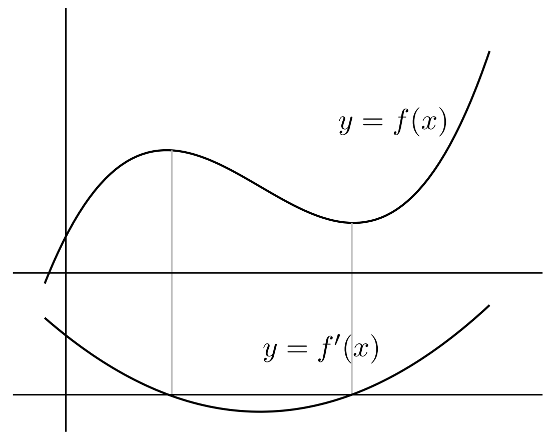
Por tanto la derivada de una función en un punto dice como crece una función y lo hace midiendo la inclinación de la recta tangente pues la derivada es la pendiente de la recta tangente.

Cuanto mayor es la derivada en valor absoluto más vertical es la gráfica. Según sea positiva o negativa sube o baja.

4.2 Función derivada

Si una función $y = f(x)$ definida en un dominio D tiene derivada en cada punto de D resulta una función que se llama función derivada y se representa $y' = f'(x)$
También se representa la función derivada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = [f(x)]'$$



Ejemplo Hallar la derivadas de la función: $y = x^2 + 3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 3 - (x^2+3)}{h} = 2x$$

$y' = 2x$ es la función derivada de $y = x^2 + 3$

4.3 Cuadro de derivadas

Reglas de derivación:

$(c)' = 0$	la derivada de una constante es 0
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	para derivar una potencia se baja el exponente y se le resta una unidad. En particular: $(x)' = 1$; $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ la derivada de una raíz es 1 partido por dos veces la raíz; $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$
$(f+g)' = f' + g'$	la derivada de la suma es la suma de las derivadas
$(f.g)' = f'g + fg'$	la derivada de un producto es la derivada del 1^0 por el 2^0 más el 1^0 por la derivada del 2^0
$(c.f)' = c.f'$	la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función
$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$	la derivada de un cociente es la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador, partido por el denominador al cuadrado
$(g[f(x)]' = g'[f(x)].f'(x)$	la derivada de la función compuesta, función de función, es la derivada de la exterior en la interior, por la derivada de la interior.

Derivadas de funciones elementales:

Exponencial: $(e^x)' = e^x$ para otra base: $(a^x)' = a^x.La$

Logarítmica: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ para otra base: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$

Ejemplos

1. $y = 3x^4 - 2x;\quad y' = 12x^3 - 2$
2. $y = (x^2-3)(2x+3x^5);\quad y' = 2x(2x+3x^5) + (x^2-3)(2+15x^4)$

3. $y = \dfrac{2x - 3x^5}{7x - 5}$; $\quad y' = \dfrac{(2 - 15x^4)(7x - 5) - (2x - 3x^5)7}{(7x - 5)^2}$

4. $y = \sqrt{x}$; poniendo $y = x^{1/2}$ resulta: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5. $y = \sqrt[3]{x}$; poniendo: $y = x^{1/3}$ resulta: $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

6. $y = \dfrac{5x^4 - 3\sqrt{x}}{1 - x}$; $\quad y' = \dfrac{(20x^3 - \frac{3}{2\sqrt{x}})(1 - x) - (5x^4 - 3\sqrt{x})(-1)}{(1 - x)^2}$

7. $y = 7\ln(2x - 5)$; $\quad y' = 7\dfrac{2}{2x - 5}$

8. $y = 2e^{x - x^2}$; $\quad y' = 2(1 - 2x)e^{x - x^2}$

9. $y = (2x^3 + 5x - 2)^4$; $\quad y' = 4(2x^3 + 5x - 2)^3.(6x^2 + 5)$

10. $y = \sqrt{5x + 1}$; $\quad y' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x + 1}}$

11. Derivar simplificando $y = \dfrac{2x + 1}{(x + 3)^2}$; $\quad y' = \dfrac{2(x + 3)^2 - (2x + 1)2(x + 3)}{(x + 3)^4} =$

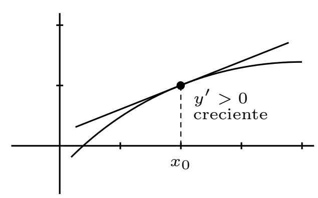
    dividiendo numerador y denominador por $(x+3)$ $= \dfrac{2x + 6 - 4x - 2}{(x + 3)^3} = \dfrac{-2x + 4}{(x + 3)^3}$

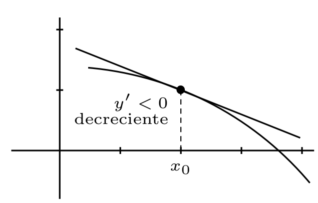
12. Derivar simplificando

    $$y = \left(\frac{1 - x}{x - 1}\right)^3 \quad y' = 3\left(\frac{1 - x}{x - 1}\right)^2 . \frac{2 - (x - 1) - (1 - x)}{(x - 1)^2} = 3\left(\frac{1 - x}{x - 1}\right)^2 . \frac{0}{(x - 1)^2} = 0$$

4.4 Estudio local de una función

Crecimiento y decrecimiento Consideremos la función $y = f(x)$ en puntos suficientemente próximos a x_0.
Si $f'(x_0) > 0$ entonces la pendiente de la recta tangente es positiva luego f es CRECIENTE en x_0.
Si $f'(x_0) < 0$ entonces la pendiente de la recta tangente es negativa luego f es DECRECIENTE en x_0





Ejemplos Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las funciones

1. $y = 4x^3 - x^2$

   $y' = 12x^2 - 2x = 2x(6x - 1)$ que se anula para $x = 0, x = 1/6$, queremos saber cuando es positiva o negativa y', esos son los los valores que delimitan cambio de signo en la y';

   Probamos por ejemplo los valores de $x : -1, 0'1, 10$

x		0		$\frac{1}{6}$	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

2. $y = e^{x^2-4x}$

   $y' = e^{x^2-4x}(2x-4)$; la parte exponencial siempre es positiva, la restante se anula para $x = 2$

x		2	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

3. $y = \dfrac{(x-3)^2}{1-x^2}$

   $$y' = \frac{2(x-3).(1-x^2)-(x-3)^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{-2x^3+6x^2+2x-6+2x^3-12x^2+18x}{(1-x^2)^2} = \frac{-6x^2+20x-6}{(1-x^2)^2}$$

   queremos saber cuando es positiva o negativa para ello hallamos los valores que delimitan cambio de signo en la y':

   Anulamos el numerador:

   $-6x^2+20x-6=0$

   $6x^2-20x+6=0 \quad x = \dfrac{20\pm\sqrt{40-144}}{12} = \dfrac{20\pm\sqrt{256}}{12} = \dfrac{20\pm 16}{12} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$

   (el denominador por tener exponente par es siempre positivo)

x		$\frac{1}{3}$		3	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

4. $y = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

   $$y' = \frac{(x+1)^2-(x-1)2(x+1)}{(x+1)^4} = \text{dividiendo por } x+1 = \frac{x+1-2(x-1)}{(x+1)^3} = \frac{-x+3}{(x+1)^3}$$

x		-1		3	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

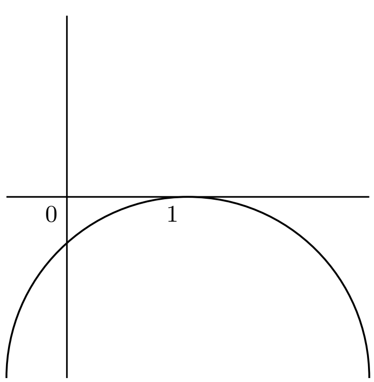
Método práctico de estudio de puntos críticos o extremos Si $f'(x_0)=0$ entonces en x_0 la tangente es horizontal, luego se tienen las siguientes situaciones:

$y = -(x-1)^2$

$y' = -2(x-1)$

x		1	
y'	$+$		$-$

$f(1) = 0$ MAXIMO

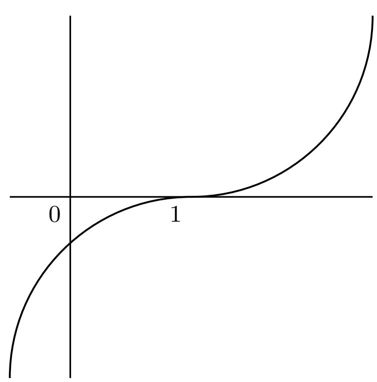


$y = (x-1)^3$

$y' = 3(x-1)^2$

x		1	
y'	$+$		$+$

$f'(1) = 0$ (este caso se llama inflexión horizontal)

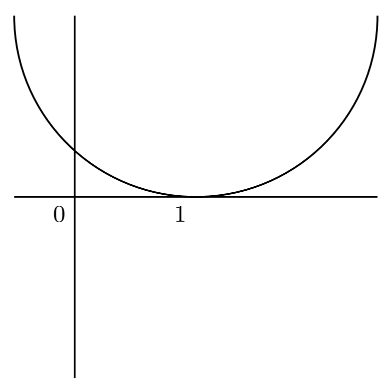


$y = (x-1)^4$

$y' = 4(x-1)^3$

x		1	
y'	$-$		$+$

$f'(1) = 0$ MINIMO



4.5 Representación gráfica de funciones

1) Dominio y regionamiento Campo de existencia es el conjunto de valores de x para los que existe la función. Regionamiento son las regiones del plano en las que hay gráfica. Por ejemplo una exponencial $y = e^{3x-2}$ es siempre positiva, luego la gráfica está por encima del eje de abcisas. Para una función racional se estudia el signo de y (análogo al crecimiento).

2) Puntos de corte Con el eje OY se hace $x = 0$

Con el eje OX se hace $y = 0$

3) Asíntotas (rectas tangentes en el infinito)

a) Verticales: valores de x que hacen infinita la y

b) Horizontales: $y = n$; $\quad n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

c) Oblícuas: $y = mx + n$

$m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\quad n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$

notas: a) Si hay asíntota horizontal no hay oblícua.

b) Los polinomios no tienen asíntotas.

c) En funciones trascendentes estudiar el límite por los dos lados.

4) Extremos y crecimiento Son los máximos y mínimos. Se estudia la primera derivada.

Ejemplo a) Representar la función polinómica: $y = 12x - x^3$

Como es un polinomio basta con los puntos de corte y el crecimiento

1. Puntos de corte:

con $OY : x = 0$, resulta $y = 0$

con $OX : y = 0$, resulta $x = 0, x = \pm\sqrt{12} = 3'46$

2. Extremos y crecimiento: $y' = 12 - 3x^2$, se anula para $x = -2, x = 2$

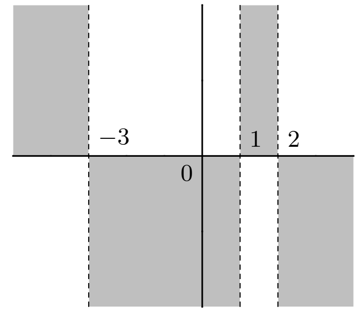
x		-2		2	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Sustituyendo en la función:
$f(-2) = -16$ "grande negativo", $\quad f(2) = 16$ "grande positivo"

Como ejercicio dibujar la gráfica.

Ejemplo b) La función racional: $y = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x + 2}$

Dominio y regionamiento:



$x+3=0; \quad x=3$

$x^2-3x+2=0; \quad x=\begin{cases}1\\2\end{cases}$

x		-3		1		2	
y	$-$		$+$		$-$		$+$

Puntos de corte: con $OY: x=0$, resulta $y=\dfrac{3}{2}$

con $OX: y=0$, resulta $x=-3$

Asíntotas:

verticales $\begin{cases}x=1\\x=2\end{cases}$

horizontales $n=\lim\limits_{x\to\infty}(fx)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}=0$ asíntota $y=0$

Extremos y crecimiento:

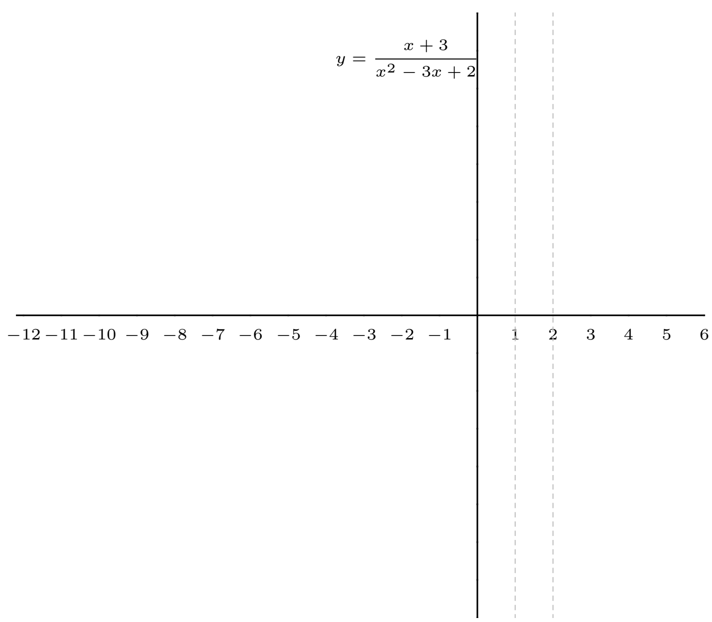
$$y'=\frac{-x^2-6x+11}{(x^2-3x+2)^2}$$

$f'(x)=0$ para $-x^2-6x+11=0$

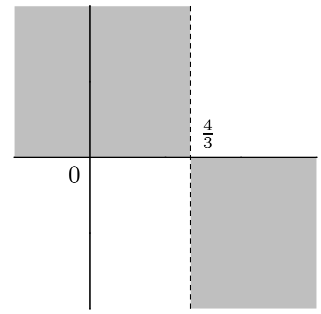
$x^2+6x-11=0 \quad x=\dfrac{-6\pm\sqrt{36+44}}{2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{80}}{2}=\dfrac{-6\pm 8'94}{2}=\begin{cases}1'47\\-7'47\end{cases}$

Probamos por ejemplo el valor de $x=0$

x		$-7'47$		$1'47$	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		MIN		MAX	



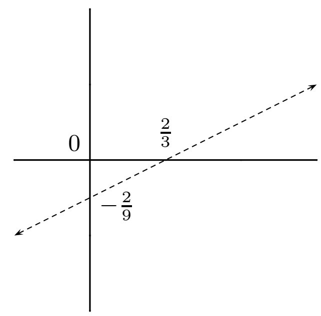
Ejemplo c) La función racional: $y = \dfrac{(x-1)^2}{3x-4}$



Dominio y regionamiento: $R - \{\frac{4}{3}\}$

x		$\frac{4}{3}$	
y	$-$		$+$

Puntos de corte:
con OY : $x = 0$, resulta $y = \frac{-1}{4}$
con OX : $y = 0$, resulta $x = 1$

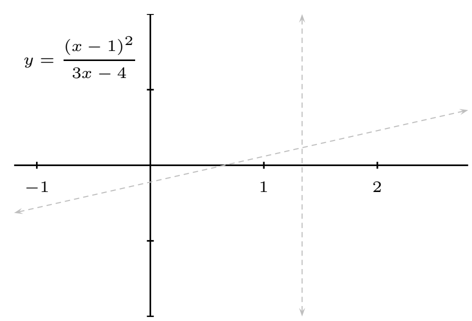


Asíntotas:
verticales $x = 4/3$
horizontales $n = \lim\limits_{x\to\infty}(fx) = \infty$ no hay
oblicuas: $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)^2}{x(3x-4)} = \dfrac{1}{3}$
$n = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x-1)^2}{3x-4} - \dfrac{x}{3}\right)$
$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 6x + 3 - 3x^2 + 4x}{(3x-4)3} = \dfrac{-2}{9};$
asíntota oblicua: $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{9}$

Extremos y crecimiento:

$y' = \dfrac{3x^2 - 8x + 5}{(3x-4)^2}$
$f'(x) = 0$ para $x = 1, x = 5/3$
Probamos por ejemplo los valores de $x : 0, 1'1, 10$

x		1		$\frac{5}{3}$	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



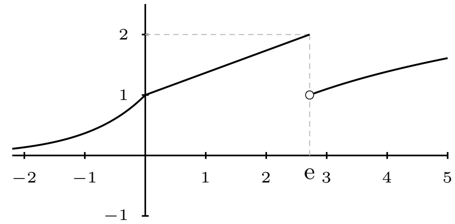
Sustituyendo en la función:
$f(1) = 0$, $(1, 0)$ MAXIMO
$f(\frac{5}{3}) = \frac{4}{9}$, $(\frac{5}{3}, \frac{4}{9})$ MINIMO

Observaciones:

1. **Simetrías** (cuando la función es par o impar)
   $f(-x) = \begin{cases} f(x) \text{ función par, simetría respecto eje } OY \\ -f(x) \text{ función impar, simetría respecto origen} \end{cases}$
   si la expresión de $f(x)$ incluye algo del tipo $ax + b$ no hay simetría.
2. Al representar una función $y = f(x)$ no puede haber una vertical que corte a la recta en dos puntos. Ni puntos de corte con asíntotas verticales.
3. En caso de duda en zonas conflictivas se pueden hallar algunos puntos.
4. Las funciones definidas a trozos no se estudian según el procedimiento general, los trozos suelen ser funciones conocidas.

Ejemplo Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \leq 0 \\ 1 + \frac{x}{e} & si \quad 0 < x \leq e \\ \ln x & si \quad e < x \end{cases}$$



Es continua siempre, excepto en $x = e$.
Es derivable siempre, excepto en $x = e$ por no ser continua, y en $x = 0$, pues al ser punto anguloso las derivadas son distintas por cada lado.

5. Para representar funciones polinómicas suele ser suficiente estudiar: a) Puntos de corte, b) Extremos y crecimiento.

6. Para representar funciones racionales suele convenir estudiar: a) Regionamiento, b) Puntos de corte, c) Asíntotas, d) Extremos y crecimiento.

4.6 Problemas de máximos y mínimos

1. Hallar un número positivo cuya suma con su recíproco sea mínima.

   número $= x$, suma: $S(x) = x + \dfrac{1}{x}$, en el mínimo la derivada ha de ser 0

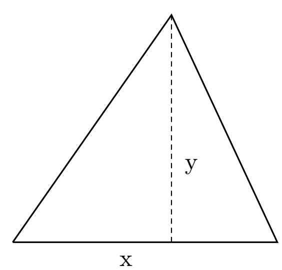
   $S'(x) = 1 + \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

   $S'(x) = 0; \quad \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 0; \quad x^2 - 1 = 0; \quad x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

x		1	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

   el mínimo es para $x = 1$

2. La suma de la base y la altura de un triángulo es 20 cm. ¿Qué longitud ha de tener la base para que el área sea máxima?

   $S = \dfrac{x.y}{2} = \text{máx. } x + y = 20; y = 20 - x$

   sustituyendo: $S(x) = \dfrac{x(20 - x)}{2} = \dfrac{1}{2}(20x - x^2)$

   $S'(x) = \dfrac{1}{2}(20 - 2x)$, se anula para $20 - 2x = 0; \quad x = 10;$

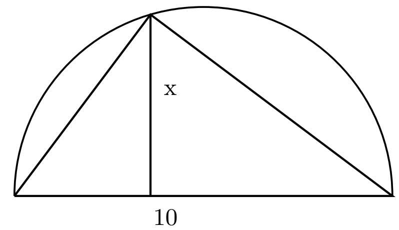
x		10	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$

   luego es base $x = 10$ para área máxima.

3. En una circunferencia de 5 cm de radio se inscribe un triángulo haciendo coincidir uno de los lados con un diámetro. Hallar el triángulo de área máxima que se puede construir.

$S(x) = \dfrac{10.x}{2} = 5x \quad S'(x) = 5,$

S' no se anula nunca, al ser positiva es siempre creciente, x ha de tomar el mayor valor posible que es 5. (máximo absoluto)



4. Hallar el valor de m, n en la siguiente función, sabiendo que $y = mx^3 - nx^2$ tiene un máximo en $(0, 0)$ y un mínimo en $(4, -32)$.

   Pasa por $(0, 0)$; sustituyendo queda $0 = 0$; no dice nada

   Pasa por $(4, -32)$; sustituyendo queda $-32 = 64m - 16n; \quad -2 = 4m - n$

   $y' = 3mx^2 - 2nx$; para $x = 4, \quad f'(4) = 0; \quad 3m.16 - 2n.4 = 0; \quad 6m - n = 0$

   resolviendo el sistema: $\begin{cases} -2 = 4m - n \\ 6m - n = 0 \end{cases} \qquad m = 1,\ n = 6$

   la función es $y = x^3 - 6x^2$, se puede comprobar que cumple la condición restante, o sea que $(0, 0)$ es un máximo y $(4, -32)$es mínimo.

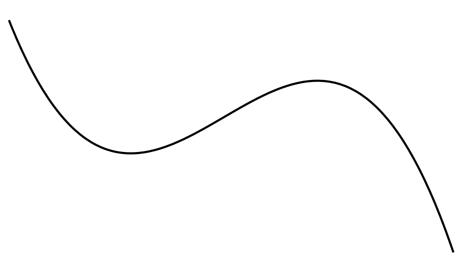
Problemas de derivadas

1. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada en $x = 3$ de la función $f(x) = 5x^2 - x + 2$.

   Solución: $f'(3) = 29$

2. Hallar la función derivada de la función del problema anterior aplicando la definición. Solución: $f'(x) = 10x - 1$

3. Señalar puntos en la siguiente gráfica de una función en los que la derivada pueda valer aproximadamente: a) -3, b) -1, c) 0, d) 0'5, e) 2, f) 5.



4. La posición de un móvil en función del tiempo es s = 20 + 4t (espacio en metros, tiempo en segundos); calcular utilizando la definición de derivada su velocidad a los 20 segundos, y al cabo de 5 minutos. Hallar la función velocidad instantánea. ¿Qué tipo de movimiento tiene?

   Solución: $s'(20) = 4, s'(300) = 4, s'(t) = 4$, movimiento de velocidad constante uniforme

En los siguientes el enunciado es "calcular la derivada":

5. $y = 3x^5 - \dfrac{1}{x}$

6. $y = 3\sqrt{x} + \dfrac{4}{x} - 2$

7. $y = (8x^2 + 7x) \cdot \dfrac{1}{x}$

8. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

9. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x - 4} - 2x$

   Solución: $f'(x) = \frac{(4x-3)(x-4)-(2x^2-3x)}{(x-4)^2} - 2$

10. $f(x) = x.\ln(x + 1)$

    Solución: $f'(x) = \ln(x + 1) + \frac{x}{x+1}$

11. $f(x) = xe^{2x}$

    Solución: $f'(x) = e^{2x} + 2x.e^{2x}$

12. $y = (3e+5)^{3x-1}$

    Solución: $y' = (3e+5)^{3x-1}.3.\ln(3e+5)$

13. $f(x) = \dfrac{4x^2-5x}{x(x^2+1)}$

    Solución: $f'(x) = \frac{(8x-5)(x^3+x)-(4x^2-5x)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}$

14. $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{2x^2-3}$

    Solución: $f'(x) = \frac{e^{x-1}(2x^2-3)-e^{x-1}.4x}{(2x^2-3)^2}$

15. $y = 2x - \dfrac{5}{3x+1}$

16. $y = \dfrac{3\ln x}{e^x+x^2}$

    Solución: $f'(x) = \frac{(3\frac{1}{x})(e^x+x^2)-3\ln x(e^x+2x)}{(e^x+x^2)^2}$

17. Derivar y simplificar: $y = \dfrac{5x+1}{(3x-15)^2}$

    Solución: $y' = \frac{-15x-81}{(3x-15)^3}$

18. La población de una cierta colonia de insectos crece de acuerdo con la fórmula $y = 1.000^{t+1} - 1.000(t+1)$ donde t es el tiempo en meses e y es el número de individuos de la población. Calcular la velocidad de crecimiento de la población a los doce meses.

    Solución: $\approx 6'9.10^{39}$

19. Calcular la derivada de $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ simplificando el resultado al máximo.

20. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \dfrac{2x^3+9}{4x+1}$ en el punto de abcisa 2.

    Solución: $y - \frac{25}{9} = \frac{116}{81}(x-2)$

21. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de: $y = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$

    Solución: crece $(-\infty,0)$; decrece$(0,\infty)$

22. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de: $y = 4x^4 - 8x^2$

    Solución: decrece $(-\infty,-1)$; crece $-1,0)$,decrece $(0,1)$, crece $(1,\infty)$

23. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de: $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

24. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de: $y = \dfrac{x-3}{x+5}$

25. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de: $y = \dfrac{3e^{\frac{x}{9}}}{x}$

26. Expresar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos de: $y = 4x^3 - x^4$

27. Hallar los coeficientes a, b, c, d de la función $y = ax^3+bx^2+cx+d$, sabiendo que sus extremos locales son los puntos (0,4) y (2,0).

    Solución: $y = x^3 - 3x^2 + 4$

28. Dibujar y estudiar la continuidad de la función definida por:

    $$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x \le 0 \\ x^2 & si \quad 0 < x < 2 \\ 2x & si \quad 2 \le x \end{cases}$$

    Estudiar en qué puntos no es derivable dicha función.

29. Estudiar el crecimiento de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

    Solución: $y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $\nearrow (0,e); \searrow (e,\infty)$

30. Dibujar y estudiar la continuidad de la función definida por:

    $$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \le 0 \\ \sqrt{x} & si \quad 0 < x < 1 \\ \frac{x}{2} & si \quad 1 \le x \end{cases}$$

    Estudiar en qué puntos no es derivable dicha función.

31. Dibujar y estudiar la continuidad de la función definida por:

    $$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 & si \quad x \le 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{e} & si \quad 0 < x < e \\ \ln x & si \quad e \le x \end{cases}$$

    Estudiar en qué puntos no es derivable dicha función.

32. Descomponer el número a en dos sumandos positivos de manera que su producto sea máximo.

    Solución: $x = a/2$

33. Descomponer el número 20 en dos sumandos tales que la suma de siete veces el cuadrado del primero más tres veces el cuadrado del segundo sea mínimo.

    Solución: 6 y 14

34. Hallar el número positivo que sumado con 25 veces su recíproco da un valor mínimo

    Solución: 5

35. Un alambre de 2 m se corta en dos trozos para hacer un cuadrado y una circunferencia. Hallar cuánto mide cada trozo para que el área que encierren sea mínima.

    Solución: radio $= 1/(4+\pi) \approx 0'14$

36. En un campo se quiere limitar una parcela de 24 m^2 por medio de una valla rectangular y además dividirla en dos partes iguales por medio de otra valla paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones deben elegirse para que la cantidad de valla sea mínima?

    Solución: 6m de largo por 4m de ancho. La valla de división paralela a los lados cortos.

37. Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio $\sqrt{2}$, ¿Cuál es el de superficie máxima? Solución: un cuadrado de lado 2

38. La función $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(-1, 0)$ y tiene un máximo en $(0, 4)$. hallar la función.

    Solución: $y = x^3 - 3x^2 + 4$

39. Hallar las dimensiones del prisma de base cuadrada con superficie mínima y volumen de 64 cm^3.

    Solución: 4

40. Se quiere construir una caja partiendo de una lámina rectangular de 24 por 32 cm, recortando un cuadrado en cada esquina y doblando. Determina cuánto hay que cortar para que la caja tenga un volumen máximo.

    Solución: $x = 4'52$

41. La suma de las dimensiones (alto, ancho, largo) de una caja con forma de prisma de base cuadrada es 36 m. Hallar las dimensiones para que el volumen sea máximo.

    Solución: 12,12,12

42. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 70 cm. Hallar sus dimensiones para que la superficie de ese triángulo rectángulo sea máxima.

    Solución: dos catetos iguales de 35 cm.

43. Un granjero dispone de 60 m de valla. Con ella, y aprovechando un muro de piedra suficientemente largo que existe en su propiedad, quiere construir un corral rectangular adosado al muro, de la mayor superficie posible: Explíquese cómo debe hacerlo.

    Solución: longitud 30 m, ancho 15 m.

44. La suma de las aristas de un prisma recto de base cuadrada es 27 cm. ¿Qué dimensiones debe tener dicho prisma para que su volumen sea máximo?

    Solución: $x = 9/4, y = 9/4$

45. En una circunferencia de radio 90 cm hallar el triángulo de área máxima inscrito en ella, uno de cuyos lados sea un diámetro.

    Solución: $h = 90$ cm, máximo absoluto

46. Hallar los puntos de la curva $y = 1/(1+x^2)$ en que la recta tangente tiene pendiente máxima y el valor de esta pendiente.

    Solución: $(-1/\sqrt{3}, 3/4), y' = \frac{2/\sqrt{3}}{(1+1/3)^2}$

47. Hallar una función polinómica de 2^0 grado que tiene un máximo en el punto (1,2) y pasa por el punto $(3, -1)$.

    Solución: $-\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$

48. Se quiere construir un recipiente cilíndrico cerrado de base circular de 64 cm^3 de volumen. Hallar las dimensiones que debe tener para que la cantidad de metal sea mínima.

    Solución: $r = \sqrt[3]{\frac{64}{2\pi}} \approx 2'16$ cm, $y \approx 4'3$ cm

49. Tras la ingestión de una bebida alcohólica, la concentración de alcohol en sangre en g/l evoluciona según la función $c(t) = t.e^{1'9-2t}$, donde t es el tiempo en horas transcurrido.

Calcula el momento en que se alcanzará la concentración máxima y cuánto valdrá ésta.

50. La empresa Autos, S.A. tiene en exclusiva el modelo Turboβ. Cada coche le cuesta a la empresa 1.200.000 pts y sabe que en un mes puede vender 30 coches a 1.600.000 pts cada uno. Un estudio e marketing le revela que por cada 20.000 pts de descuento sobre el precio anterior puede aumentar la venta en 2 coches más al mes. +Le conviene hacer estos descuentos para aumentar la venta mensual de coches? +A qué precio deberá vender entonces cada automóvil para maximizar los beneficios mensuales?

    Solución: g: ganancia en miles de pts, x: unidades de descuento de 20.000 c/u;

    $g(x) = \underbrace{-1200(30+2x)}_{coste} + \underbrace{(1600-20x)(30+2x)}_{venta} = -40x^2+200x+12000; g'(x) = 200-8x = 0, x = 2'5$, tendría que hacer 2'5 descuentos de 20.000, o sea 50.000, así vendería 5 coches más

51. Hallar una función polinómica de 2^0 grado que tiene un mínimo en el punto (3,-2) y pasa por el punto (1,4).

    Solución: $\frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{23}{2}$

    Representar las siguientes gráficas:

52. $f(x) = \begin{cases} x^2-3x+2 & si \quad x \le 1 \\ \frac{2x}{x-3} & si \quad 1 < x \end{cases}$

53. $y = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$

54. $y = |x^3 - x|$

55. $y = 4 + 8x - x^2 - 2x^3$

56. $y = \dfrac{x}{4-x^2}$

57. $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

    Solución: $y' = \frac{8x}{(x^2-4)^2}$

58. $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x \le 1 \\ \ln x & si \quad 1 < x \le e \\ e^x & si \quad e < x \end{cases}$

59. $y = \dfrac{3x^2-12}{x+5}$

    Solución: asíntota $y = 3x - 15, y' = \frac{3x^2+3x+12}{(x+5)^2}, max = -9'55, min = -0'45$

60. $y = 2x + \dfrac{4}{x-3}$

    Solución: $y = \dfrac{2x^2-6x-4}{x-3}$ asíntota $y = 2x, y' = \frac{2x^2-12x+14}{(x-3)^2}, max = -9'55, min = -0'45$

61. $y = 4x^2 - x^4$

62. $y = \dfrac{3e^{\frac{x}{9}}}{x}$

63. $y = \dfrac{x+2}{x^2+4}$

    Solución: $y' = \frac{-x^2-4x+4}{(x^2+4)^2}, x = -2 \pm \sqrt{8}$

64. $y = (x^2+9)(1-x)$

65. $y = \dfrac{x}{x^2-5x+4}$

    Solución: $y' = \frac{-x^2+4}{(x^2-5x+4)^2}$

66. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

    Solución: $y' = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}$

67. $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$

    Solución: $y' = \frac{8x}{(x^2+4)^2}$

68. $y = 2e^x - 3$

69. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

70. $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

71. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

72. $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x^2-5}$

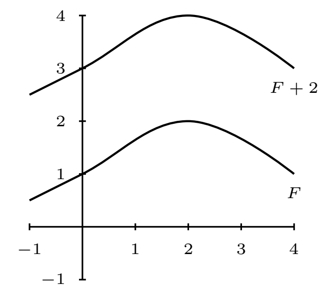
    Solución: $y' = \frac{x^2-10x+5}{(x^2-5)^2}$, $x = 5 \pm 2\sqrt{5}$

73. $y = 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3$

5 INTEGRALES

5.1 Primitiva de una función

Integrar es lo contrario de derivar, $2x$ es la derivada de x^2, el proceso contrario es:
$\int 2x dx = x^2 + C$, que se lee:
"la integral de 2x diferencial de x es x^2 más C",
(C es una constante cualquiera), a la integral se le llama primitiva.



En general:
Sea f una función, la función F se dice primitiva de f cuando la derivada de F es f; es decir $F' = f$. Por tanto:
"F primitiva de f"equivale a "f es derivada de F"
Por ejemplo: dada la función $2x$ una primitiva de ella es x^2, también es primitiva de ella $x^2 + 5$.
Luego dada una primitiva cualquiera, sumándole cualquier constante se obtiene otra primitiva, se escribe:
$\int f(x)dx = F(x) + C$

Razonando con las derivadas de x^n, e^x, $\ln x$, se hacen los siguientes ejemplos

Ejemplos

1. $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

2. $\displaystyle\int 7dx = 7x + C$

3. $\displaystyle\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$;

   en general para integrar una potencia se suma una unidad al exponente y se divide por el nuevo exponente $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

4. $\displaystyle\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

5. $\displaystyle\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x} + C$

7. $\displaystyle\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

8. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

Consideraremos los siguientes tipos de integrales :

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq -1$ "potencial"
para integrar una potencia se suma una unidad al exponente y se divide por el nuevo exponente.

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ "logarítmica"

$\int e^x dx = e^x + C$ "exponencial"

Propiedades Se deducen de las mismas propiedades de la derivadas.

1. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$; la integral de la suma es igual a la suma de las integrales, es decir para integrar una suma se va integrando cada sumando.

   Ejemplo $\int \left(x^4 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^5}{5} + \ln|x| + C$

2. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$; la integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función, es decir los números pueden entrar o salir en el signo integral.

   Ejemplo $\int \frac{e^x}{2} dx = \frac{1}{2} \int e^x dx = \frac{1}{2} e^x + C$

Ejemplos

1. $\int (3x^2 - 8x + 1)dx = x^3 - 4x^2 + x + C$

2. $\int \frac{3}{x^2} dx = 3 \int x^{-2} dx = 3\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-3}{x} + C$

3. $\int (5x^3 + 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx = 5\int x^3 dx + 2\int x^{1/2} dx - \int x^{-1/2} dx = 5\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2} = \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + C$

4. Hallar la función que pasa por el origen y por el punto $(2, 8)$ y tiene como derivada segunda $f''(x) = x^2$

   Tenemos que integrar dos veces:

   $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

   $\int \left(\frac{x^3}{3} + C\right) dx = \frac{x^4}{12} + Cx + D$

   $f(x) = \frac{x^4}{12} + Cx + D$, hacemos que pase por $(0, 0)$ y resulta $D = 0$, hacemos que pase por $(2, 8)$ y resulta:

   $f(2) = \frac{2^4}{12} + 2C = 8; \quad 8 = \frac{4}{3} + 2C; \quad C = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ Resulta: $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{10x}{3}$

5.2 Integración de funciones compuestas

Cuando hay función de función tenemos:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ si } n \neq -1 \text{ "potencial"}$$

$$\int f'(x).[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \text{ si } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \text{ "logarítmica"}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

"Si arriba está la derivada de lo de abajo la integral es el logaritmo de lo de abajo"

$$\int e^x dx = e^x + C \text{ "exponencial"}$$

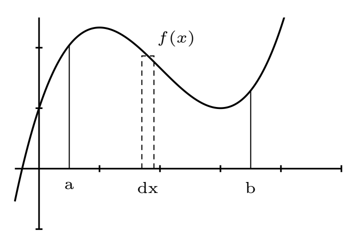
$$\int f'(x).e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

Es decir:
al derivar aparece la derivada de lo de dentro
al integrar **desaparece** la derivada de los de dentro.

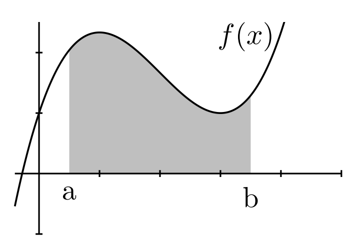
Ejemplos

1. $\int \frac{1}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C$
2. $\int (5x-2)^3 dx = \frac{1}{5} \int 5(5x-2)^3 dx = \frac{1}{5} \frac{(5x-2)^4}{4} + C$
3. $\int e^{8x+2} dx = \frac{1}{8} \int 8e^{8x+2} dx = \frac{1}{8} e^{8x+2} + C$
4. $\int x.e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x.e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

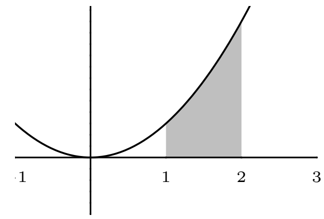
5.3 Noción de integral definida



La integral definida entre a y b de $f(x)$: $\int_a^b f(x)dx$ es la suma de las áreas de los elementos rectangulares de base "dx"y altura "$f(x)$"
a, b se llaman límites de integración.
Gráficamente la integral es el área limitada por la curva $y = f(x)$ y el eje OX entre las abcisas a y b, (salvo el signo pues $f(x)$ puede ser negativa).
La Regla de Barrow permite hallar el valor de las integrales definidas:
$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$, con $F(x)$ primitiva de $f(x)$



Ejemplos



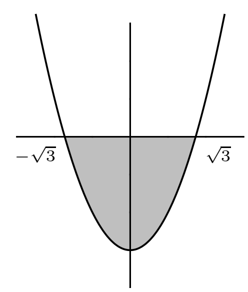
1. $\displaystyle\int_1^2 3x^2dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7$

2. $\displaystyle\int_2^4 (x^2-1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_2^4 = (\frac{4^3}{3} - 4) - (\frac{2^3}{3} - 2) = \frac{64}{3} - 4 - (\frac{8}{3} - 2) = \frac{52}{3} - \frac{2}{3} = \frac{50}{3}$

5.4 Aplicación de la integral definida al cálculo de áreas

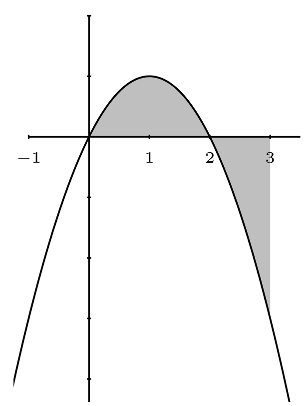
a) **Area encerrada entre la curva y el eje OX:**
Es necesario conocer el comportamiento del signo de la función en el intervalo de integración.

Ejemplos



1. Hallar el área encerrada por $y = x^2 - 3$ y el eje de abcisas
   $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = -4\sqrt{3} \quad S = 4\sqrt{3}\ u^2$
   también, como es simétrica podíamos haber hallado $S = 2.S_1$ con S_1 área entre 0 y $\sqrt{3}$.

2. Hallar el área encerrada por $y = 2x - x^2$, el eje de abcisas y las rectas $x = 0, x = 3$.

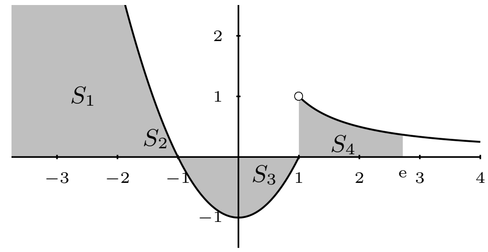


   $S = S_1 + S_2$
   $S_1 = \displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2^2 - \frac{2^3}{3} - 0 = \frac{4}{3}$
   $S_2 : \displaystyle\int_2^3 (2x - x^2)xdx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 = 3^2 - \frac{3^3}{3} - (2^2 - \frac{2^3}{3}) = -\frac{4}{3}$,
   luego $S_2 = \dfrac{4}{3}$. Resultando

$$S = \frac{8}{3}\ u^2$$

3. Hallar el área que encierra con el eje de abcisas entre -4 y e, la función

$$f(x)=\begin{cases} 3 & si \quad x\le -2 \\ x^2-1 & si \quad -2<x\le 1 \\ \frac{1}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$$



$S_1 = \text{base} \,.\, \text{altura} = 2\cdot 3 = 6$

$$S_2=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-2}^{-1}=\frac{4}{3}$$

$$S_3:\int_0^1(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1=-\frac{2}{3},\quad S_3=\frac{4}{3}$$

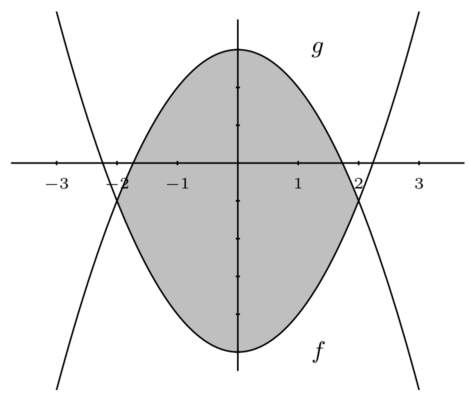
$$S_4=\int_1^e\frac{1}{x}dx=[\ln|x|]_1^e=\ln e-\ln 1=1$$

$$S=6+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+1=\frac{29}{3}\ u^2$$

b) Area encerrada por dos curvas:

Sean f y g las curvas: si $f\ge g$ en el intervalo de integración, entonces el área viene dada directamente por la integral de $f-g$.

4. Hallar el área limitada por $f: y=x^2-5, \quad g: y=3-x^2$

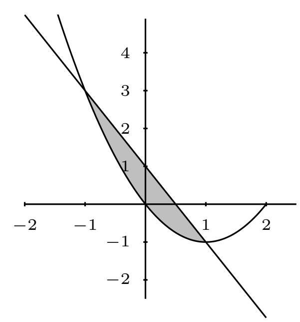


los puntos de corte corresponden a las abcisas ± 2, y $g\ge f$

$$S=2S_1=2\int_0^2 g-f$$

$$S=2\int_0^2[3-x^2-(x^2-5)]dx=2\int_0^2(8-2x^2)dx=\frac{64}{3}\ u^2$$

5. Area encerrada por $y=x^2-2x$; y la recta que pasa por los puntos $(1,-1),(-2,5)$



Recta: $y=ax+b$ $\left.\begin{array}{ll} f(1)=-1, & a+b=-1 \\ f(-2)=5, & 2a+b=5 \end{array}\right\}$ resolviendo el sistema resulta $a=-2, b=1$

La recta es: $y=-2x+1$

los puntos de corte con la parábola son: $(1,-1),(-1,3)$; llamamos: recta $g(y)$, parábola $f(y)$

$$S=\int_{-1}^1 g-f=\int_{-1}^1(1-x^2)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1=\frac{4}{3}\ u^2$$

Problemas de integrales

El enunciado es "Calcular la integral"

1. $\int (x^2 - x + 1)dx$
2. $\int (4x^3 - 5x^2)dx$
3. $\int (7e^x + \frac{9}{x^2})dx$
4. $\int (3x^2 + 5\sqrt{x} - 3x + 1)dx$
5. $\int (\frac{3}{x} - 5)dx$
6. $\int (\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \sqrt{2x})dx$
7. Hallar la ecuación de la curva que pasa por los puntos p(0,3) y Q(-1,4), sabiendo que su derivada segunda es $y'' = 6x - 2$

   Solución: $y = x^3 - x^2 - 3x + 3$

   El enunciado es "Calcular la integral"
8. $\int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})dx$

   Solución: $\frac{-1}{x} - \ln|x| + C$
9. $\int (x^2 + \frac{1}{x})dx$

   Solución: $\frac{x^3}{3} + \ln|x| + C$
10. $\int e^{-2x}dx$

    Solución: $\frac{-e^{-2x}}{2} + C$
11. $\int (3e^x - 1)dx$

    Solución: $3e^x - x + C$
12. $\int \frac{x+1}{2}dx$

    Solución: $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}C$
13. $\int (x+1)^2dx$

    Solución: $\frac{(x+1)^3}{3} + C$
14. Derivar $y = (x^2 - 5x + 1)^3$ y luego expresar la primitiva de la derivada obtenida.

    Solución: $y' = 3(x^2 - 5x + 1)^2(2x + 5), prim = (x^2 - 5x + 1)^3 + C$

    Calcular las integrales
15. $\int (\frac{8}{x} - \frac{5}{x^2})dx$

    Solución: $8\ln|x| + \frac{5}{x} + C$
16. $\int (\frac{2}{x^2} + e^x)dx$

    Solución: $\frac{-2}{x} + e^x + C$
17. $\int e^{5x}dx$

    Solución: $\frac{1}{5}e^{5x} + C$
18. $\int (x^2 + 1)2xdx$

    Solución: $\frac{(x^2+1)^2}{2} + C$
19. $\int \frac{1}{3x+1}dx$
20. $\int e^{2x-6}dx$

    Solución: $\frac{1}{2}e^{2x+6} + C$
21. $\int x.e^{x^2}dx$

    Solución: $\frac{e^{x^2}}{2} + C$
22. $\int \frac{dx}{e^x}$

    Solución: $-e^{-x} + C$
23. $\int \frac{x}{4+x^2}dx$

    Solución: $\frac{1}{2}\ln|4 + x^2| + C$
24. $\int \frac{dx}{4-x}$

    Solución: $-\ln|4 - x|$ + C
25. $\int \frac{x}{x^2-24}dx$

    Solución: $\frac{1}{2}.\ln|x^2 - 24| + C$
26. $\int (4x - 5)dx$

    Solución: $2x^2 - 5x + C$
27. $\int e^{3x-3}dx$

    Solución: $\frac{1}{3}e^{3x-3} + C$

28. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+5}$

Solución: $\frac{1}{3}\ln|3x+5|+C$

29. $\displaystyle\int_{-1}^{3}(x^2+1)dx$

Solución: $\frac{40}{3}$

30. $\displaystyle\int_{-2}^{-1}(x-1-\frac{1}{x})dx$

Solución: $\frac{-5}{2}+\ln 2 = 1'81$

31. $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{2dx}{3x+1}$

Solución: $\frac{2}{3}(\ln 10 - \ln 4)$

32. $\displaystyle\int_{0}^{2}e^{2x+1}dx$

Solución: $\frac{1}{2}(e^5-e) = 310'7$

33. Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx$, siendo: $f(x) = 3 - 2x - \dfrac{1}{x-2}$. ¿Es el área que encierra con el eje de abcisas entre $x=-1$ y $x=1$?

Solución: $7'09$

34. Hallar el área comprendida entre la curva $y = x^3 - 6x^2$ y el eje OX.

Solución: 108 u^2

35. Hallar el área comprendida entre el eje de abcisas y la función $y=(x-2)(x+1)$ entre $x=3$ y $x=5$

Solución: 20'6 u^2

36. Determinar el área limitada por la parábola $y=x^2-5$ y la recta que pasa por los puntos (0,3) (1,5).

Solución: 36 u^2

37. Calcular el área de la región del plano delimitada por $y=x^2-x$ y por $y=1-x$.

Solución: 4/3

38. Área comprendida entre $y=2$, $y=x^3-x+2$

Solución: 1/2 u^2

39. Hallar el área encerrada entre $y=x(x-1)(x+2)$ y el eje de abcisas

Solución: $S = 8/3 + 5/12 = 37/12$ u^2

40. Hallar el área que encierra con el eje de abcisas entre -2 y 2, la función

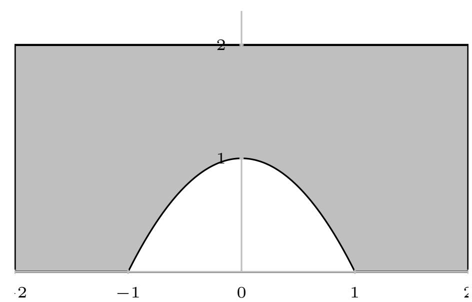
$$f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x \le -1 \\ 1+x^2 & si \quad -1 < x \le 0 \\ e^x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Solución: $\frac{7}{3}+e^2$ u^2

41. Hallar el área que encierra con el eje de abcisas la función $y=\frac{1}{x}$ entre $x=1$ y $x=e$.

Solución: 1 u^2

42. Calcular el área de la región rayada si la figura curva es la parábola $y=1-x^2$



Solución: 20/3

43. Hallar el área encerrada por la parábola $y=x^2+2$ y la recta $y=x+4$

Solución: $27'72$

44. Hallar el área encerrada entre las curvas $y=x^2-x, \quad y=3x-x^2$

Solución: 8/3

45. Hallar el área encerrada entre las gráficas de las funciones $y=x^2+4x+5, \quad y=5$

Solución: entre $-4y0, S=32/3$

46. Hallar el área encerrada por la parábola $y=(x+3)(2-x)$ y la recta $x-2y=2$

Solución: 9/2

6 PROBABILIDAD

6.1 Introducción

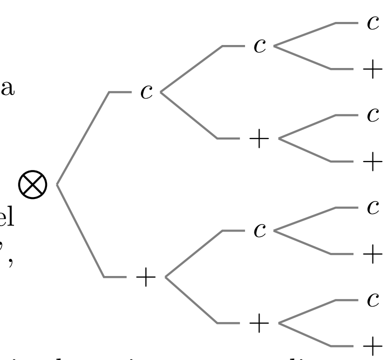
Fenómeno aleatorio es aquel en el cual es imposible predecir el resultado en cada realización u observación; ej: lanzar una moneda, extraer una carta de una baraja, número de nacimientos de una ciudad en un mes, etc.

Cálculo de probabilidades es el modelo teórico de las regularidades que se observan en los resultados de los fenómenos aleatorios cuando crece el número de pruebas.

6.2 Sucesos

El conjunto de todos los resultados asociados a un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** y se suele representar por E

Ejemplo Escribir el espacio muestral del lanzamiento de una moneda tres veces a) por extensión, b) mediante diagrama en árbol.
a) $E = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++\}$



Suceso es todo subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, en el experimento lanzar un dado $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, son sucesos "salir par", "salir menos de 3".

Se dice que un suceso se ha verificado cuando al realizar la experiencia aleatoria correspondiente, el resultado es uno de los elementos de ese suceso. Si al tirar el dado sale un 6 se han verificado, entre otros, los sucesos $\{6\}, \{salir\ par\}, \{5, 6\}, E$.

Los sucesos formados por un solo elemento se llaman **sucesos elementales**, por ejemplo $\{6\}$.
El espacio muestral se llama también **suceso seguro**, el suceso $\emptyset$ se llama suceso imposible.

Hemos considerado los sucesos como conjuntos, por tanto hablaremos de:

inclusión $\subset$: $A \subset B$ (se lee A contenido en B), si todos los elementos de A están en B
unión $\cup$: $A \cup B$ se forma juntando los elementos de A y de B
intersección $\cap$: $A \cap B$ está formado por los elementos comunes a los dos
complementario $\bar{A}$: los elementos restantes que no están en A.

Existen también denominaciones propias del lenguaje de sucesos:
$A \subset B$ es $A \Longrightarrow B$ (se lee A implica B), la verificación del suceso A implica la del suceso B; ej $A =$ salir múltiplo de 3, $B =$ salir más de 2.
$A \cup B$ se verifica el suceso A **o** el suceso B, se verifica **al menos** uno de los dos
$A \cap B$ se verifica el suceso A **y** el suceso B
El complementario $\bar{A}$ del suceso A se llama suceso **contrario**.
Dos sucesos disjuntos, sin ningún elemento común: $A \cap B = \emptyset$ se llaman **incompatibles**.

6.3 Frecuencia de un suceso

Prueba es cada realización de un experimento aleatorio. Sea un experimento aleatorio del que se han realizado N pruebas. Si el suceso A aparece n veces se dice que en la referida muestra de N pruebas la frecuencia relativa del suceso A es $fr(A) = \frac{n}{N}$.

Observamos que: (podemos pensar en el lanzamiento 20 veces de un dado: A =salir par)
1) La frecuencia relativa de un suceso está comprendida entre 0 y 1.
2) La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.
3) La frecuencia relativa de la unión de dos sucesos incompatibles es la suma de las respectivas frecuencias: si$A \cap B = \emptyset, \quad fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B)$

Por otro lado si por ejemplo se lanza una moneda 50 veces y salen 28 caras, no tiene por qué ocurrir que al repetir las 50 tiradas vuelvan a salir 28 caras, o sea, las frecuencias relativas suelen variar en cada serie de pruebas.

No obstante al aumentar el número de pruebas se tiene el siguiente resultado práctico llamado **ley del azar** : las frecuencias relativas de los sucesos tienden a estabilizarse alrededor de ciertos números, a estos números se les suele llamar probabilidad de los respectivos sucesos.

6.4 Probabilidad

Es el modelo teórico de las frecuencias relativas. Por tanto la probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1 y cumple las condiciones:
1) $p(E) = 1$, la probabilidad del suceso seguro es 1.
2) dados A, B sucesos incompatibles : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, es decir la probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades.

Probabilidad de **Laplace** es la que asigna a cada suceso elemental la misma probabilidad, por tanto la probabilidad de un suceso elemental es $\frac{1}{N}$ siendo N el número de sucesos elementales.

Entonces si el suceso A es la unión de n sucesos elementales tendremos:

$p(A) = \frac{n}{N}$ o en otras palabras $p(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$

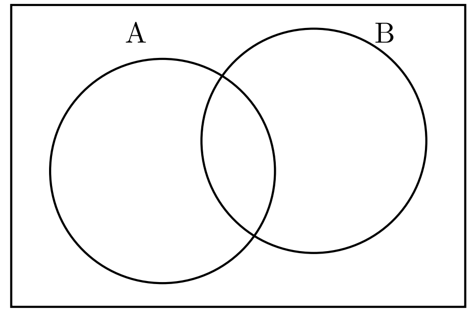
Por ejemplo en la extracción de una carta de una baraja española, la probabilidad de que salga un basto es $p(B) = \frac{10}{40}$

Probabilidad **estimada**, empírica o a posteriori de un suceso es la frecuencia relativa de la aparición del suceso cuando el número de observaciones es muy grande.

Por ejemplo a la vista de la producción de un gran número de piezas, una fábrica encuentra que el 20% de los cerrojos producidos por una determinada máquina son defectuosos para unos ciertos requerimientos. Parece lógico asignar una probabilidad 0'2 de obtener un cerrojo defectuoso.

Propiedades de una probabilidad:

Las demostraciones se deducen de las condiciones de la definición de probabilidad.



1. La probabilidad del suceso imposible es 0: $p(\emptyset) = 0$,
2. Para el suceso complementario se cumple:
$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$
3. Para la unión de dos sucesos cualesquiera se tiene: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Ejemplos

1. Hallar la probabilidad de que salga bastos o figura al sacar una carta de una baraja española (40 cartas).

   $A =$ salir bastos, $p(A) = \dfrac{10}{40}$

   $B =$ salir figura (sota, caballo, rey), $p(B) = \dfrac{12}{40}$

   $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{10}{40} + \dfrac{12}{40} - \dfrac{3}{40} = \dfrac{19}{40}$

2. Un dado ha sido manipulado de manera que la probabilidad de obtener un número es proporcional al mismo. Hallar la probabilidad de que se obtenga un número par al lanzarlo una vez.

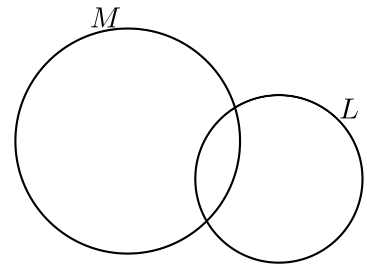
   Repartir proporcionalmente al número de la cara:

   1
   2
   3
   4 Hay que repartir toda la probabilidad, o sea, 1 entre 21: $\dfrac{1}{21}$
   5
   6
   suma 21

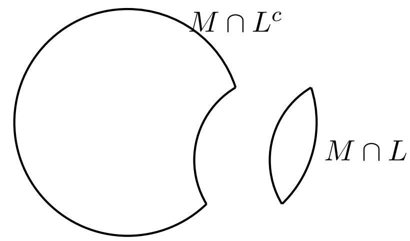
   $p(1) = 1 \cdot \frac{1}{21}$
   $p(2) = 2 \cdot \frac{1}{21}$
   $p(3) = 3 \cdot \frac{1}{21}$
   $p(4) = 4 \cdot \frac{1}{21}$
   $p(5) = 5 \cdot \frac{1}{21}$
   $p(6) = 6 \cdot \frac{1}{21}$

   $p\{\text{ par }\} = p\{2\} + p\{4\} + p\{6\} = \dfrac{2}{21} + \dfrac{4}{21} + \dfrac{6}{21} = \dfrac{12}{21}$

3. La probabilidad de que un alumno apruebe Matemáticas es $0'6$ y la de que apruebe Lengua es $0'5$ y la de que apruebe las dos es $0'2$.



a) Hallar la probabilidad de que apruebe alguna (es decir, al menos una).
b) Hallar la probabilidad de que no apruebe ninguna.
c) Hallar la probabilidad de que apruebe Matemáticas y no Lengua.



a) $p(M \cup L) = p(M) + p(L) - p(M \cap L) = 0'6 + 0'5 - 0'2 = 0'9$
b) $p[(M \cup L)^c] = 1 - 0'9 = 0'1$
c) $M = (M \cap L^c) \cup (M \cap L)$ disjunta; $p(M \cap L^c) = p(M) - p(M \cap L) = 0'6 - 0'2 = 0'4$

4. Una urna contiene 25 bolas blancas de madera, 36 blancas de cristal, 39 bolas rojas en total, y 32 de madera en total.

   a) Hallar el número total de bolas.

   Si se elige al azar una bola:

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja y de madera?.

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca o de cristal?.

   a) Completamos el cuadro:

	rojas	blancas	
madera	7	25	32
cristal	32	36	68
	39	61	100

   Consideremos los sucesos B = extraer bola blanca, M = extraer bola de madera, R = extraer bola roja. Entonces:

   b) $p(B) = 61/100 = 0'61$

   c) $p(R \cap M) = 7/100 = 0'07$

   d) $p(B \cup C) = p(B) + p(C) - p(B \cap C) = 0'93$

6.5 Sucesos dependientes e independientes

Ejemplo Una caja contiene 10 piezas, de las cuales 4 son defectuosas.
I) Hallar la probabilidad de extraer dos defectuosas consecutivas
a) sin devolver la primera.
b) devolviendo la primera.
II) Sin devolver la primera, hallar la probabilidad de obtener una de cada tipo.

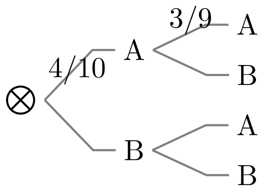
A = extraer pieza defectuosa ; B = extraer pieza no defectuosa
I) Para hallar la probabilidad de una rama se multiplican las probabilidades de la rama:

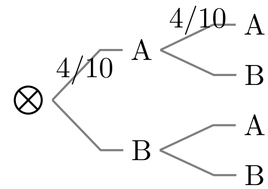
a) Sin devolución, sucesos dependientes:

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1).p(A_2/A_1) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

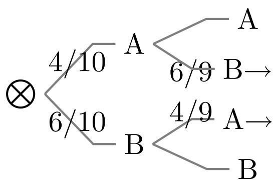
b) Con devolución, sucesos independientes:

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1).p(A_2) = \frac{4}{10}.\frac{4}{10} = \frac{4}{25}$$





II) Como es la unión de varias ramas, se suman las probabilidades de las ramas favorables:



$$p[(A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)] = p(A_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap A_2) = \frac{4}{10} . \frac{6}{9} + \frac{6}{10} . \frac{4}{9} = \frac{24}{45}$$

Dos sucesos A y B son **independientes** si la realización de uno no varía la probabilidad de la realización del otro;

Si se lanza una moneda y un dado, el salir cara en la moneda es independiente de que salga par en el dado. Si lanzo una moneda la primera vez la probabilidad de salir cara es 1/2, si la lanzo la segunda vez la probabilidad de cara sigue siendo 1/2. En cambio si extraigo una carta de una baraja la probabilidad de salir espada la primera vez es 10/40, si no devuelvo la carta, evidentemente la probabilidad de salir espada en la segunda no es 10/40, pues ha cambiado la composición de la baraja.

Para sucesos independientes la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades: $p(A \cap B) = p(A).p(B)$

Dados dos sucesos A, B , se llama suceso B **condicionado al** A y se representa B/A, al suceso "realizarse el suceso B supuesto realizado el suceso A".

Para sucesos dependientes la probabilidad de la intersección es el producto de la probabilidad del primero por la probabilidad del segundo condicionado al primero: $p(A \cap B) = p(A).p(B/A)$

Ejemplos

1. Para no confundir la velocidad con el tocino se estudió una muestra de 100 casos y se obtuvieron estos datos:

	Tocino T	No tocino
Velocidad V	32	48
No velocidad	8	12

   Según estos datos, ¿son independientes los sucesos T y V?

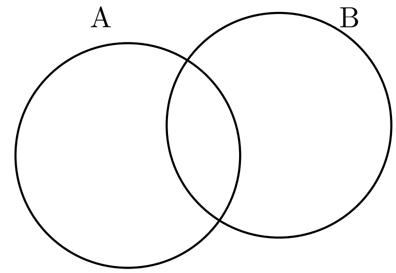
   $p(V).p(T) = \frac{80}{100} . \frac{40}{100} = 0'32$

   $p(V \cap T) = \frac{32}{100} = 0'32$

   efectivamente la velocidad y el tocino , V y T son independientes.

2. Sean A y B dos sucesos independientes de un espacio de probabilidades. Sean $0'3$ y $0'6$ sus probabilidades respectivas. Hallar las probabilidades de cada uno de los sucesos siguientes:

S_1 acontece exactamente uno de los sucesos A o B, uno de los dos pero no los dos.
S_2 acontecen los dos A y B.



$p(S_1) = p(A \cup B - A \cap B) = p(A) + p(B) - 2p(A \cap B)$
necesitamos $p(A \cap B)$ que es el 2^0 apartado, como son independientes:
$p(A \cap B) = p(A).p(B) = 0'3.0'6 = 0'18 = p(S_2)$
luego $p(S_1) = 0'3 + 0'6 - 2.0'18 = 0'54$

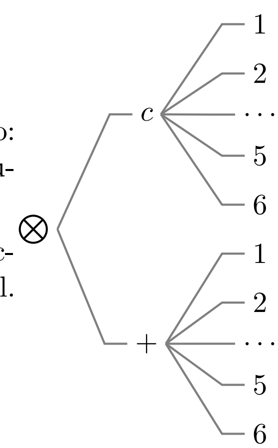
Observaciones:

1. Resumiendo:

   independientes $p(A \cap B) = p(A).p(B)$ **dependientes** $p(A \cap B) = p(B/A).p(A)$

2. No confundir sucesos incompatibles (la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades), con sucesos independientes (la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades).Por eso:

   Dos sucesos compatibles pueden ser dependientes o independientes. Dos sucesos incompatibles necesariamente son dependientes.

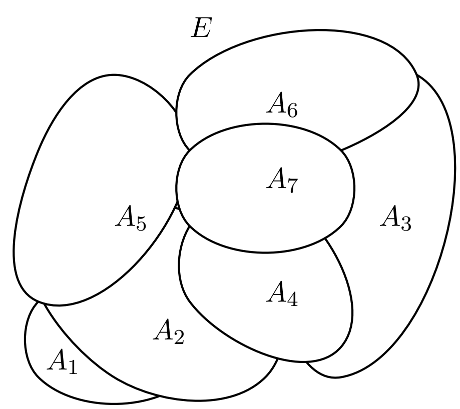


3. En la extracción de, por ejemplo, dos bolas de una urna es lo mismo: extracción simultánea de las dos, que extracciones sucesivas sin devolución.

4. Experimentos independientes simultáneos es situación análoga a extracción sucesiva con devolución, esto permite utilizar diagrama en árbol. Por ejemplo se lanza un dado y una moneda.

6.6 Sistema completo de sucesos

Un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es un sistema completo de sucesos cuando:
1) son incompatibles entre sí: $A_i \cap A_j = \emptyset$
2) su unión es todo el espacio muestral: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$



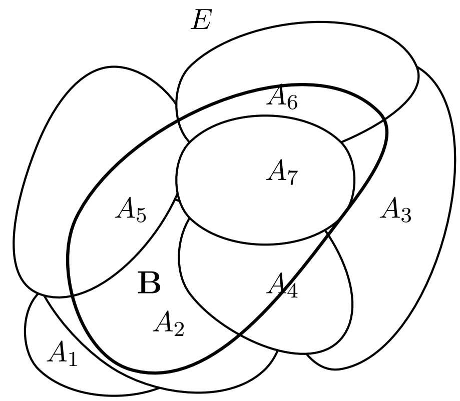
Ejemplo: En la extracción de una carta de una baraja, los sucesos salir copas, salir espadas, salir bastos y salir oros forman un sistema completo de sucesos.

6.7 Teorema de la probabilidad total

Dado un sistema completo de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Sea B un suceso, entonces:

$$p(B) = \sum_{1}^{n} p(B/A_i).p(A_i)$$

Demostración:
$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$ unión disjunta
$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \ldots + (B \cap A_n) = \sum_1^n p(A_i).p(B/A_i)$



En el ejemplo anterior sea F salir figura (sota, caballo, rey), (llamaremos S salir espada)
Por ejemplo $p(F/C) = \frac{3}{10}$, pues hay tres figuras en las diez copas, por tanto:
$p(F) = p(F/C).p(C) + p(F/B).p(B) + p(F/S).p(S) + p(F/O).p(O) = \frac{3}{10}\frac{10}{40}.4 = \frac{12}{40}$

6.8 Teorema de Bayes

Dado un sistema completo de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, Sea B un suceso, entonces: $p(A_i/B) = \frac{p(B/A_i).p(A_i)}{\sum_1^n p(B/A_i).p(A_i)}$

Demostración:
$p(A_i/b) = \frac{p(Ai \cap B)}{p(B)} =$ sustituyendo el denominador por el teorema anterior $= \frac{p(A_i).p(B/A_i)}{\sum_1^n p(A_i).p(B/A_i)}$

Se utilizan las siguientes denominaciones: $p(A_i)$ se llaman probabilidades a priori (si no se especifican se toman iguales), $p(A_i/B)$ se llaman probabilidades a posteriori, $p(B/A_i)$ se llaman verosimilitudes.

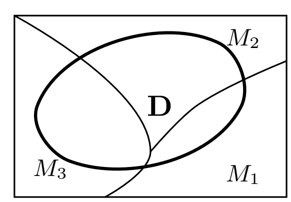
Ejemplo Una fábrica tiene tres máquinas que producen tornillos, la máquina 1^a produce el 10% del total, la 2^a produce el 60% y la 3^a el 30% restante.

La probabilidad de que la primera produzca un tornillo defectuoso es 0’20, que lo produzca la segunda es 0’32 y la tercera 0’16.

a) De una caja de tornillos producidos por esa fábrica tomamos uno, ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuosos?.

b) De una caja tomamos un tornillo y resulta defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina 1^a?

Solución:
sea M_1 el suceso ”tornillo producido por la 1^a máquina”; $p(M_1) = 0'1$
sea M_2 el suceso ”tornillo producido por la 2^a máquina”; $p(M_2) = 0'6$
sea M_3 el suceso ”tornillo producido por la 3^a máquina”; $p(M_3) = 0'3$



Suceso: $D =$ ”coger un tornillo defectuoso”
las probabilidades del suceso D condicionadas por M_1, M_2, M_3 son $p(D/M_1) = 0'20, p(D/M_2) = 0'32, p(D/M_3) = 0'16$

a) Por el teorema de la probabilidad total:
$p(D) = p(M_1).p(D/M_1)+p(M_2).p(D/M_2)+p(M_3).p(D/M_3) = 0'1.0'2+0'6.0'32+0'3.0'16 = 0'26$

b) Por Bayes:
$$p(M_1/D) = \frac{p(D/M_1).p(M_1)}{\sum_1^3 p(D/M_i).p(M_i)} = \frac{0'1.0'2}{0'26} = \frac{1}{13}$$

Ejercicio Una urna A contiene 3 bolas blancas y una negra y otra urna B contiene 5 bolas negras y 7 blancas. Se extraen dos bolas de la urna A y, sin mirar el color, se introducen en la B. A continuación se extrae una bola de la urna B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea negra?

b) Si la bola extraída ha sido negra, cuál es la probabilidad de que las dos bolas pasadas de A a B fueran blancas.

Problemas de probabilidad

1. Escribir el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de un dado dos veces. a) Mediante diagrama en árbol. b) Por extensión.

2. Escribir el espacio muestral correspondiente a la suma de puntos en el lanzamiento de un dado dos veces. ¿Tiene la misma probabilidad el 8 que el 3?.

   Solución: $p(tres) = 2/36$, $p(ocho) = 5/36$

3. Tres cajas tienen las siguientes composiciones: A = 5 bolas blancas y 2 negras, B = 7 bolas blancas y 1 negra y C = 2 bolas blancas y 8 negras. Se escoge al azar una caja y se extraen dos bolas sin reemplazamiento. Escribir el espacio muestral.

4. La clásica ruleta de los casinos consiste en una rueda dividida en 37 compartimentos iguales, numerados de 0 a 36. Al caer en uno de ellos la bola, determina el número premiado. Puede apostarse al número que saldrá de diferentes maneras. He aquí algunas: Si apostamos a IMPAR ganamos en el caso de que salga cualquier número impar; si apostamos a PAR, ganamos si sale número par distinto de cero, que no se considera par ni impar (al salir cero, gana la banca); apostar a PASSE significa hacerlo a cualquier númro superior a 18; apostar a MANQUE significa hacerlo a cualquier número inferior o igual a 18, excluido el cero. Sean P, I, S, M, respectivamente, los sucesos "salir par", "impar", "passe"y "manque". Se pide: a) Describir el conjunto de resultados asociado a una pulsación de la ruleta, así como la probabilidad de cada uno de los resultados posibles. b) Describir por extensión los sucesos P, I, S, M y calcular la probabilidad de cada uno de ellos. c) Describir en términos de P, I, S y M, y por extensión, los sucesos "sale par y manque", "no sale par", "sale impar, pero no passe". Hallar la probabilidad de cada uno de ellos.

   Solución: b) $p(par) = 18/37 = p(I) = p(S) = p(M)$, c) $p(PyM) = 9/37, p(noP) = 19/37, p(IynoS) = 9/37$

5. En una ciudad el 30% de personas llevan gafas y el 70% fuman. Se elige una persona al azar. Hallar: a) Probabilidad de que fume. b) Probabilidad de que lleve gafas.

   Solución: a) 0'7 b) 0'3

6. Se tiran un dado y una moneda. Hallar la probabilidad de obtener cruz y número primo.

   Solución: 0'3333

7. Dada la frase: "Algunos de los que no estudian, también aprueban", elegimos al azar una palabra de ella, hallar la probabilidad de que tenga tres letras.

   Solución: 1/4

8. Un ladrón tiene 7 llaves maestras y quiere abrir una puerta que sólo la abren dos de ellas; como tiene prisa, elige al azar una de las llaves. Hallar la probabilidad de que no abra la puerta.

   Solución: 5/7

9. Una urna contiene 4 bolas blancas numeradas del 1 al 4, 6 negras numeradas del 5 al 10 y 10 rojas del 11 al 20. Se extrae una al azar. Hallar: a) Probabilidad de que sea roja o blanca. b) Probabilidad de que sea negra y número par. c) Probabilidad de que sea roja y múltiplo de 3.

   Solución: a) 0'7 b) 3/20 c) 0'15

10. En una urna hay 3 bolas blancas, 4 negras, 5 rojas y 6 azules. Hallar: a) Probabilidad de que al sacar una bola sea azul. b) Probabilidad de que al sacar dos bolas sean blancas. c) Probabilidad de que al sacar dos bolas sean, la primera negra y la segunda roja.

    Solución: a) 0'3333 b) 0'0196 c) 0'0653

11. Hallar la probabilidad de que al sacar dos cartas de una baraja española: a) sean 2 oros, sin devolver la primera carta. b) sean 2 figuras, devolviendo la primera carta.

    Solución: a) 0'0576 b) 0'09

12. En una clase mixta hay 30 alumnas; 15 estudiantes repiten curso de los que 10 son alumnos y hay 15 alumnos que no repiten curso. a) Justificar que el número de estudiantes de esa clase es 55. b) Si se elige al azar un estudiante de esa clase: b_1) ¿Cuál es la probabilidad de sea alumno?. b_2) ¿Cuál es la probabilidad de que repita curso y sea alumna?. c) Si se eligen dos estudiantes al azar ¿cuál es la probabilidad de que ninguno repita curso?.

    Solución: a) 55 estudiantes, b_1 25/55, b_2 5/55, c)52/99

13. La caja C_1 contiene 5 fichas azules y 3 rojas, la caja C_2 contiene 4 fichas azules y 6 rojas. Se traslada una ficha de la caja C_1 a la caja C_2; a continuación se extrae una ficha de C_2. ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha extraída sea roja?.

    Solución: p(roja extracción 2^a caja) = 51/88

14. Si se tiene una moneda trucada de forma que al lanzarla la probabilidad de obtener cara es 2/3 y la probabilidad de obtener cruz es 1/3. Se efectúa la siguiente experiencia: se lanza la moneda al aire, y si sale cara se toma al azar un número del 1 al 9; si sale cruz se toma al azar un número del 1 al 5. Calcular la probabilidad de que al realizar la experiencia el número escogido sea par.

    Solución: p(n^o par) = 0'42 = 58/135

15. Dar las definiciones y poner ejemplos de los siguientes conceptos: i) Experimento aleatorio ii) Suceso seguro iii) Probabilidad de Laplace iv) Sucesos incompatibles.

16. Se lanzan simultáneamente tres monedas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que todas queden en el suelo del mismo modo?.

    Solución: $p(c) + p(+) = 1/4$

17. Se extraen 3 cartas de una baraja española (40 cartas). Hallar la probabilidad de que sean 3 bastos; a) sin reemplazamiento; b) con reemplazamiento.

    Solución: a) $P[(1B) \cap (2B) \cap (3B)] = 10/40.9/39.8/38 = 0'012$, b) $P[(1B) \cap (2B) \cap (3B)] = 10/40.10/40.10/40 = 0'015$

18. De una baraja de 40 cartas se toman dos. Hallar la probabilidad: a) De que las dos sean oros. b) De que las dos sean espadas o figuras. c) Al menos una sea sea bastos.

    Solución: a) $p(OO) = 10/40.9/39 = 0'0576$, b) X salir espadas o figura $p(XX) = 19/40.18/39 = 0'21$, c) árbol $p(almenosunbasto) = 1 - \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = 0'442$

19. Se lanzan 6 monedas simultáneamente. Calcular la probabilidad de que al menos salga una cara.

    Solución: 63/64

20. Consideremos la baraja española (40 cartas). Extraemos una carta al azar, miramos de que palo es y la devolvemos a la baraja. Repetimos la misma operación cuatro veces seguidas. Se pide: a) Probabilidad de haber sacado dos veces solamente una carta de oros. b) Probabilidad de haber sacado más de dos cartas de bastos. c) Hallar las probabilidades en los dos casos anteriores en el supuesto de que no devolvemos las cartas en cada extracción.

    Solución: a) 0'2109, b) 0'05078, c_1) 0'214, c_2 0'041

21. Tres cajas tienen las siguientes composiciones: A = 5 bolas blancas y 2 negras, B = 7 bolas blancas y 1 negra y C = 2 bolas blancas y 8 negras. Se escoge al azar una

caja y se extraen dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que las bolas sean del mismo color.

Solución: $1/3(11/21 + 3/4 + 29/45)$

22. Se lanzan dos dados. Calcular la probabilidad de

    i) Salir dos 6

    ii) Salir números consecutivos.

    iii) Salir dos números con suma igual a 7.

    Solución: i) 1/36, ii) 5/18, iii) 1/6

23. La probabilidad de que un hombre siga vivo dentro de 25 años es 3/5 y la de que su esposa lo esté es 2/3. Halle la probabilidad de que al cabo de ese tiempo

    i) Ambos estén vivos.

    ii) Solo viva el hombre.

    iii) Solo viva la esposa.

    iv) Al menos uno esté vivo.

    Solución: i) 6/15, ii) 1/5, iii) 4/15, iv) 13/15

24. De una baraja de 48 cartas se extraen simultáneamente dos cartas. Encuentre la probabilidad de que:

    i) Al menos una sea espadas.

    ii) Una sea de espadas y otra de oros.

    Solución: i) 0'4414, ii) 6/47

25. Se lanza un dado y, a continuación, una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de obtener:

    i) Cuatro y cara.

    ii) Cruz e impar.

    iii) Cara o un número mayor que 1.

    Solución: i) 1/12, ii) 3/12, iii) 11/12

26. En una urna hay 20 bolas blancas y 10 negras. Hallar la probabilidad de que al extraer dos bolas, realizando la extracción sin devoluciones, las dos bolas sean del mismo color.

    Solución: 47/87

27. Encontrar la probabilidad de que al lanzar dos dados se obtenga: i) Dos seises. ii) Dos números iguales. iii) 8 de suma

    Solución: i) 1/36, ii) 1/6, iii) 5/36

28. Una urna contiene 10 bolas blancas, 6 rojas y 6 negras. Se extrae al azar una bola y se sabe que no es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?. Se devuleve la bola a la urna y se extrae de nuevo una bola, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja o blanca?.

    Solución: i) 1/2, ii) 8/11

29. Se lanza un dado cinco veces y se anotan los números obtenidos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cuatro números primos?. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los números sean compuestos?. (Nota: el número 1 se considerará primo).

    Solución: p(4 primos) = 80/243, p(5 compuestos) $= (2/6)^5 = 1/243$

30. En una urna se tienen bolas numeradas del 0000 al 9999. Si se extrae una bola al azar, encontrar la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: i) Todas las cifras del número extraido son impares. ii) el número acabe en 17. iii) Sea múltiplo de 4.

    Solución: i) p(impares) = 1/16, ii) p(–17) = 100/10000 = 1/100, iii) p(múl 4)= 2500/10000 = 1/4 considerando el 0 múltiplo.

31. Se lanza 6 veces un dado de póker ¿cuál es la posibilidad de que salga al menos un as?

32. Se tienen dos urnas A y B, en la primera hay 6 bolas negras y 4 rojas; en la segunda hay 3 bolas negras, 2 rojas y 5 blancas. Se lanza un dado y si sale múltiplo de 3 se extrae una bola de la urna A y en caso contrario de la B. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola sea roja?.

    Solución: 4/15

33. Se lanzan a la vez 20 dados. Calcular las probabilidades:

    i) Sólo salga el número 6.

    ii) Salgan solo números pares.

34. Un dado está trucado de forma que la probabilidad de sacar 2 es doble que la de obtener 1; la de sacar 3 es triple que la de 1; la de 4 cuádruple que la de 1 y así sucesivamente. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 4?.

35. De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta al azar. Calcular la probabilidad de que dicha carta sea:

    i) Oros o bastos

    ii) Copas o figura (sota, caballo y rey)

36. Se lanzan 15 dados. Encontrar la probabilidad de que i) Salga siempre un número impar. ii) Salga por lo menos un 5.

37. En una clase, el 40% aprueban Filosofía y el 50% Matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar la Filosofía habiendo aprobado las Matemáticas es 0'8. Prueba que la mitad de la clase suspende ambas asignaturas y calcula el porcentaje de alumnos que teniendo aprobada la Filosofía aprueban también las Matemáticas.

    Solución: a) 0'5 b) el 100%

38. De una baraja española de 40 cartas se extraen 4 sucesivamente sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que sean del mismo palo.

    Solución: 4(10/40)(9/39)(8/38)(7/37) = 0'009

39. En un cierto edificio se usan dos ascensores; el primero lo usan el 45 % de los vecinos y el resto usan el segundo. El porcentaje de fallos del primero es del 5 % mientras que el del segundo es del 8 %. Si en un cierto día un inquilino queda "atrapado" en un ascensor, hallar la probabilidad de que haya sido en el primero.

    Solución: $\frac{225}{225+440} = 0'34$

40. Dos personas A y B organizan el siguiente juego: Tiran un dado tres veces. Si sale algún 1, gana A. Si no sale ningún 1, gana B. ¿Cuál de las dos personas tiene más probabilidades de ganar?

    Solución: $p(B) = (\frac{5}{6})^3 = 0'5787 > 0'5$ gana B

41. Dos amigos A y B juegan al tenis entre sí habitualmente. Han comprobado que de cada 10 sets A gana 6. Hallar la probabilidad de que B gane un partido a tres sets.

    Solución: árbol incompleto AA, ABA, etc 208/1000

42. Pepe es el encargado de tirar los penaltis en su equipo, su probabilidad de hacer gol es 1/3. ¿Cuántas veces le deberá mandar repetir el lanzamiento de un penalti el árbitro del próximo encuentro para garantizar a Pepe un 75 % de posibilidades de hacer gol?

    Solución: $1 - (\frac{2}{3})^n \geq= 0'75, n = 4$

43. El 45 % de los habitantes de una determinada ciudad son del Barça y los demás son del Madrid. Un 27% de los del Barça y el 38 % de los del Madrid además juegan al fútbol. Calcular la probabilidad de que al elegir un habitante: a) Juegue al fútbol b) Sea del Barça sabiendo que no juega al fútbol.

    Solución: a) 0'33, b) 0'4906

44. El 80 % de los turistas que el año pasado visitaron nuestra región eran españoles y de estos el 40 % tenían más de 60 años. De los extranjeros el 75 % tenía más de 60 años. Escogida una persona al azar, se pide: a) Si no es español, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 60 años? b) Si es español, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 60 años? c) Cuál es la probabilidad de que tenga más de 60 años?

    Solución:

    el 40% del 80 $\frac{40}{100}\frac{80}{100} = 0'32$

	esp	for
men		
may	0'4.0'8	0'2.0'25
	0'8	0'2

45. Ana, Pedro y Juan se reparten los problemas que tienen que resolver. Se quedan respectivamente con el 23 %, 44 %, y 33 %. Sabemos que Ana resuelve correctamente el 60 % de los problemas que intenta, Pedro el 20 % y Juan el 40%. a) Hallar la probabilidad de que al elegir un problema

al azar esté mal hecho. b) Hallar la probabilidad de que al elegir un problema al azar y que resulta que está mal resuelto sea de los hechos por Juan.

Solución: a) 0'642, b) 0'308

46. Los datos de votantes en unas elecciones muestran que votó el 73'5 % de los hombres censados y que no votó el 42'9 % de las mujeres. El censo era de 48 % hombres y el 52 % mujeres.

    De entre todas las personas censadas, escogemos una al azar. Calcular la probabilidad de que esta persona: a) Haya votado. b) Haya votado y sea hombre. c) Sabiendo que ha votado, sea mujer.

    Solución: a) 0'649, b) 0'352, c) 0'457

47. Una fábrica produce tres tipos diferentes de bolígrafos, A,B y C. El número de unidades de cada tipo que produce es el mismo. Salen defectuosos de cada mil 15 del tipo A, 3 del tipo B y 7 del tipo C. En un control de calidad se detectan el 70 % de todos los bolígrafos defectuosos de tipo A, el 80 % del tipo B y el 90 % del tipo C. Los bolígrafos defectuosos detectados en dicho control se tiran. Si se saca al azar uno de estos bolígrafos defectuosos que se han tirado, calcular la probabilidad de que sea de tipo A.

    0'546

48. Dos profesores comparten un número de teléfono. De las llamadas que llegan, 2/5 son para A y 3/5 son para B. Sus ocupaciones les alejan de este teléfono, de modo que A está fuera el 50 % del tiempo y B el 25 %. Calcular la probabilidad de que no está ninguno para responder al teléfono. Llaman por teléfono y no lo cogen, cuál es la probabilidad de que llamen a A.

    Solución: a) 0'35, b) 0'57

49. El despertador de Pepe no suena el 20 % de las veces. Cuando no suena el despertador llega tarde a clase el 84 % de los días, en cambio cuando suena llega tarde solo el 12 %. Hoy Pepe ha llegado puntual, cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador.

    Solución: 0'956

50. La fabricación de cierto tipo de objetos se hace en dos fases, la probabilidad de que resulte defectuoso en la primera fase es del 4% mientras que en la segunda es del 1%. ¿Cuál es la probabilidad de que un objeto tomado al azar no tenga defectos?

    Solución: método 1) por árbol en dos fases $p(nodef) = 0'96.0'99 = 0'9504$, método 2) $p(def) = D_1 \cup D_2 = p(D_1) + p(D_2) - p(D_1 \cap D_2) = 0'0496, p(nodef) = 1 - p(def)$

51. Tenemos tres bolsas iguales, la A con 13 bolas negras y 15 blancas, la B con 16 bolas negras y 12 blancas y la C con 7 bolas negras y 13 blancas

    a) Se coge una bola de una bolsa al azar y resulta negra, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la bolsa A.

    b) Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.

    Solución: a) Bayes (vuelta atrás de árbol) $p(A/n) = \dfrac{0'1518}{0'4554} = 0'33$

    b)árbol normal $p(b) = 1 - 0'4554 = 0'53$

7 VARIABLES ALEATORIAS. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

7.1 Variable aleatoria. Función de distribución de probabilidad

Es el modelo matemático de la variable estadística. Se dice que hemos definido una variable aleatoria X (v.a.) para un experimento aleatorio cuando hemos asociado un valor numérico a cada resultado del experimento.

Ejercicio Imagínese un juego de apuestas con estas normas: Se lanza un dado normal y se cobra 3 euros si sale 1 o 2, 1 euro si sale 4, 5 o 6 y se pagan 5 euros si sale un 3. Se lanza el dado 60 veces y se obtienen los siguientes resultados:

3, 4, 6, 1, 3, 1, 1, 5, 6, 6, 1, 1, 6, 1, 5, 6, 2, 2, 3, 2, 6, 4, 6, 2, 5, 6, 1, 1, 3, 2, 4, 5, 5, 3, 2, 5, 6, 5, 3, 5, 2, 6, 1, 4, 6, 1, 5, 5, 5, 5, 2, 4, 3, 3, 1, 4, 5, 2, 2, 6

Se considera la variable estadística que dé las ganancias y pérdidas:

1) Hacer la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

2) Dibujar el diagrama de frecuencias y el polígono de frecuencias.

número	1	2	3	4	5	6
frecuencia	11	10	8	6	13	12

número	var. estad. X	frecuencia N_i	frec. relativa n_i
{ 3 }	-5	8	0’13
{ 4,5,6 }	1	31	0’51
{ 1,2 }	3	21	0’35
		$\Sigma N_i = 60$	

Ejemplo 1) Considérese el juego anterior: Se lanza un dado normal y se cobra 3 euros si sale 1 o 2, 1 euros si sale 4, 5 o 6 y se pagan 5 euros si sale un 3. La v.a. que describe las posibles ganancias en este juego es $X(1) = 3, X(2) = 3, X(3) = -5, X(4) = 1, X(5) = 1, X(6) = 1$.

A cada valor que toma la variable le podemos asociar la probabilidad del suceso que representa:

x_i	-5	1	3
p_i	1/6	3/6	2/6

Ejemplo 2) Lugar de rotura de una cuerda de 3 m al tirar de un extremo estando el otro fijo, $E =$ conjunto de lugares de rotura $= [0, 3]$, $X =$longitud del punto de corte al punto fijo.

Hay dos tipos de variable aleatoria, **continua** cuando puede tomar cualquier valor de un intervalo de R, ejemplo 2), y discreta el en caso que tome un número finito de valores: ejemplo 1).

A los valores que toma la variable se le puede asociar la probabilidad de los sucesos que representan.

Función de distribución de la v.a. X es la función $F : R \longrightarrow R$ dada por $F(x) = p(X \leq x)$

Los valores que toma $F(x)$ miden la probabilidad de que la variable tome un valor menor o igual que x, $F(x)$ es la función de probabilidades acumuladas. Es una función creciente que toma valores entre 0 y 1.

Ejemplo 1: $F(2'5) = p(X \leq 2'5) = p(X = -5) + p(X = 1) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6}$

Ejemplo 2: $F(2'5) = p(X \leq 2'5) = \dfrac{\text{longitud favorable}}{\text{longitud posible}} = \dfrac{2'5}{3}$

7.2 Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Los valores que toma la variable se suelen expresar $x_1, x_2, x_3, \ldots$.
En el ejemplo 1) : $x_1 = -5, x_2 = 1, x_3 = 3$
A cada valor que toma la variable le asociamos la probabilidad del suceso que representa,
$X \longrightarrow p(X)$; $\quad p(X = -5) = 1/6, p(X = 1) = 3/6, p(X = 3) = 2/6,$

En general: La **función de probabilidad** de la v.a. discreta X es la función $p : R \longrightarrow R$ dada por $p(x) = p(X = x)$

Los valores que toma: $p(X = x_i) = p(x_i) = p_i$ miden la probabilidad de que la variable X tome el valor x_i.

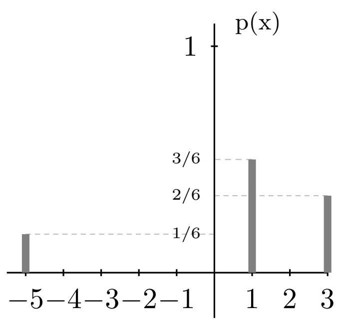
Tomando intervalos de longitud uno con centro en los valores de la v.a. x_i tenemos el **histograma de probabilidad** de la v.a. X.

La función de distribución de una v.a. discreta X es una función escalonada.

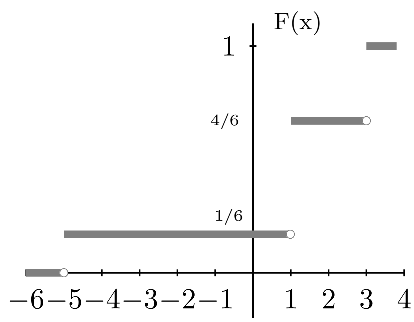
En el ejemplo:

x_i	-5	1	3
p_i	$1/6$	$3/6$	$2/6$
$F_i = p(X \leq x_i)$	$1/6$	$4/6$	1

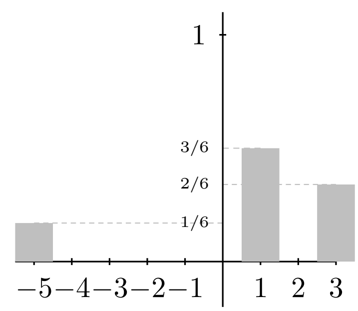
Función de Probabilidad



Función de Distribución



Histograma de Probabilidad



En el histograma de probabilidad la suma de las áreas de los rectángulos hasta un valor x_i (incluido el suyo) da la probabilidad $p(X \leq x_i)$.

7.3 Relación entre variables estadísticas y aleatorias

Para muestras grandes las frecuencias relativas tienden a las correspondientes probabilidades, lo cual nos permite considerar a las funciones de probabilidad como el modelo teórico de las frecuencias relativas y a las funciones de distribución de probabilidad como el modelo de las frecuencias relativas acumuladas, que son las que se pueden obtener en la práctica, pues no se puede hacer un número infinito de observaciones. Es lo que llamábamos probabilidad empírica.

Así por ejemplo en el problema que resolveremos más adelante:

"En la fabricación de automóviles de una determinada marca de cada 1.000 fabricados 10 resultan defectuosos por término medio. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote de seis automóviles más de la mitad sean defectuosos?"Se toma como probabilidad de que un automóvil resulte defectuoso $p = 10/1000 = 0'01$.

7.4 Parámetros de una variable aleatoria discreta

Se corresponden con los de una variable estadística, por ejemplo la media de una variable estadística es: media $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i N_i}{\Sigma N_i} = \Sigma x_i n_i$

y la desviación típica: $(\text{des. tip.})^2 = \dfrac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2 . N_i}{\Sigma N_i} = \Sigma x_i^2 . n_i - \bar{x}^2$

Para una variable aleatoria discreta:

Esperanza matemática o media: $\mu = \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} x_i p_i$

Varianza: $\sigma^2 = \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i^2 p_i - \mu^2$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$

Intuitivamente, si la variable aleatoria describe las ganancias y pérdidas de un determinado juego, la esperanza indica la ganancia media por partida que puede esperar un jugador. Si la esperanza es cero se dice que el juego es equitativo; en caso contrario, es favorable o desfavorable al jugador según que la esperanza sea positiva o negativa.

La desviación típica determina, junto con la esperanza, el intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ en el que se espera se produzcan "la mayoría de los resultados".

En el ejemplo resultaría:

$E(X) = \dfrac{1}{6}(-5) + \dfrac{3}{6}1 + \dfrac{2}{6}3 = \dfrac{4}{6} = 0'666$

$\sigma^2 = \dfrac{1}{6}(-5)^2 + \dfrac{3}{6}1^2 + \dfrac{2}{6}3^2 - \left(\dfrac{4}{6}\right)^2 = \dfrac{260}{36} = 7'222; \quad \sigma = \sqrt{7'222} = 2'68$

7.5 Distribución binomial

Ejemplo En el lanzamiento de un dado se considera éxito obtener 5 o más puntos y fracaso lo contrario, por tanto probabilidad de éxito: $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, probabilidad de fracaso: $q = \frac{2}{3}$. Supongamos que se hacen 10 pruebas.

Se trata de la distribución binomial $B(10, \frac{1}{3})$, consideremos la variable aleatoria: $X =$ número de éxitos en las 10 pruebas

Hallemos la probabilidad de tener 4 éxitos (y por tanto 6 fracasos), o sea de $X = 4$:

La probabilidad de tener 4 éxitos y 6 fracasos en un orden determinado, como los lanzamientos son independientes, es: $p.p.p.p.q.q.q.q.q.q = p^4.q^6$; como el orden no nos importa el suceso tener cuatro éxitos es la unión de los sucesos del tipo anterior, hay $\binom{10}{4}$ de estos sucesos (que son las posibilidades de "escoger"las cuatro tiradas con éxito entre las 10) por tanto la probabilidad buscada de $X = 4$, es sumar $\binom{10}{4}$ veces la cantidad $p^4.q^6$:

$p(X = 4) = \dbinom{10}{4} p^4 q^6 = 210.\left(\dfrac{1}{3}\right)^4.\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 = 0'7868$

En general:

Distribución binomial $B(n,p)$**:** Es la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta que tiene las características:

1) En el experimento aleatorio se consideran dos resultados posibles "éxito"y su contrario "fracaso".

2) En una prueba la probabilidad de éxito es p y la de fracaso es $q = 1 - p$

3) La probabilidad no cambia en las sucesivas pruebas, son independientes.

4) La variable aleatoria discreta es: $X =$ número de éxitos en n pruebas,

$$\boxed{p(X = x) = p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \text{ con } p + q = 1}$$

5) los parámetros son $\mu = n.p$, $\quad \sigma^2 = n.p.q$

Ejemplo En la fabricación de automóviles de una determinada marca de cada 1.000 fabricados 10 resultan defectuosos por término medio. Cuál es la probabilidad de que en un lote de seis automóviles

a) haya 2 defectuosos

b) más de la mitad sean defectuosos

c) haya alguno defectuoso

d) hallar la media y la desviación típica

Sea $p = 0'01$ la probabilidad de ser defectuoso; $B(6, 0'01)$

a) $p(X = 2) = \binom{6}{2} p^2 q^4 = 15.0'01^2.0'99^4 = 0'0014$

b) $p(X \geq 4) = p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 6) = \binom{6}{4} p^4 q^2 + \binom{6}{5} p^5 q^1 + \binom{6}{6} p^6 q^0 = 15.0'01^4.0'99^2 + 6.0'01^5.0'99 + 0'01^6$

c) Mejor hacerlo por suceso contrario: $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} p^0 q^6 = 1 - 1.0'99^6 = 1 - 0'9414 = 0'05852$

d) $\mu = 6.0'01 = 0'06$, $\quad \sigma^2 = 6.0'01.0'99 = 0'0594 \quad \sigma = \sqrt{0'0594}$

nota: [2]

7.6 Función de densidad de probabilidad de una v.a. continua

Ejemplo Lugar de rotura de una cuerda de 3 m al tirar de un extremo estando el otro extremo fijo.

X =longitud del punto de rotura al extremo fijo, puede tomar cualquier valor entre 0 y 3.

Consideremos: probabilidad = casos favorables / casos posibles; la probabilidad de que se rompa en un punto determinado $X = x_0$ es cero pues en este caso casos favorables / casos posibles = "$1/\infty$"= 0. Por ello:

Para una v.a. continua no tiene sentido hablar de probabilidad de que la variable tome un determinado valor porque habría que dividir por "infinitos"casos posibles

Se introduce entonces el concepto de **función de densidad de probabilidad f(x)** que indica la cantidad de probabilidad en esa zona:

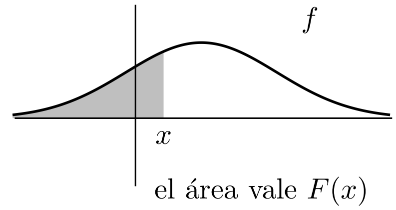
Entonces

[2] Pueden ser útiles las siguientes propiedades de los números combinatorios:

$$\binom{m}{h} = \frac{m!}{h!.(m-h)!} \qquad \binom{m}{h} = \binom{m}{m-h}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, o sea la función de distribución es el área bajo la curva $f(t)$ entre el inicio de la gráfica y el valor x.



el área vale $F(x)$

Por tanto se cumple que una función de densidad siempre es positiva y además: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, o sea el área desde el principio hasta el final vale 1.

7.7 Parámetros de una variable aleatoria continua:

Esperanza matemática: $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$

Varianza: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$

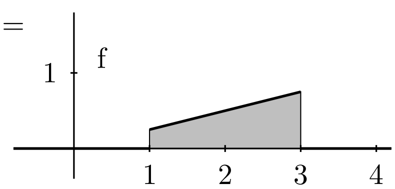
Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$

Ejemplo Se define la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x/4 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

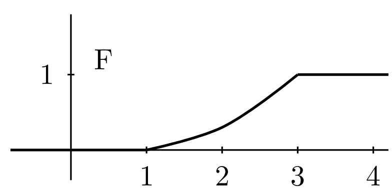
a) Comprobar que cumplen las condiciones de función densidad.
b) Representar gráficamente.
c) Calcular $p(1/2 \leq x \leq 2)$
d) Calcular la correspondiente función de distribución y representarla.
e) Calcular la media y la varianza
Solución:

a) f es siempre positiva y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{1}^{3} \frac{x}{4} = \left[\frac{x^2}{8}\right]_1^3 = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1$,



c) $p(1/2 \geq x \geq 2) = \int_{1/2}^{2} f(x)dx == \int_{1}^{2} \frac{x}{4} = \left[\frac{x^2}{8}\right]_1^2 = \frac{3}{8}$,

d) $F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ x^2/8 - 1/8 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & si \quad x > 3 \end{cases}$

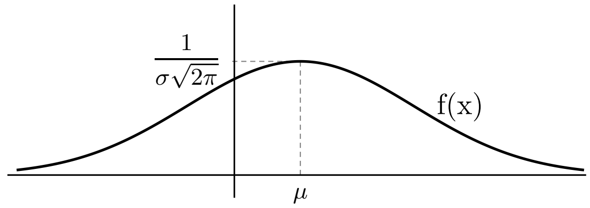


e) media $= \frac{13}{6}$, varianza $= 5 - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} = 0'30$

7.8 Distribución normal

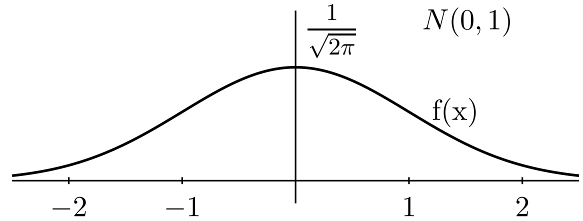
La variable aleatoria continua más utilizada es la normal su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Se suele expresar $N(\mu, \sigma)$; los parámetros μ y σ son respectivamente el valor medio y la desviación típica, la curva se llama campana de Gauss.
La normal $N(0,1)$ tiene de función densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$



cuyos parámetros son $\mu = 0, \sigma = 1$, y tiene las integrales de $f(x)$ tabuladas.

Para la $N(0,1)$ en nuestra tabla aparece $p(Z \leq z)$, siendo $z \geq 0$, para buscar otras probabilidades hay que utilizar la simetría de $f(z)$, y el complementario.

Ejercicios: Hallar: a) $p(Z \leq 0'34) =$, b) $p(Z < -2'85) =$, c) $p(Z \geq 2'1) =$,
d) $p(Z \leq 3'8) =$ e) $p(-1 < Z \leq 2'37)$

Para hallar las probabilidades de una normal cualquiera $N(\mu, \sigma)$ se hace el cambio de variable (se llama tipificar) $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ que la transforma en la normal $N(0,1)$.

Ejercicios:

1) Hallar en $N(8,3)$el valor de $p(X \leq 9'6) = p(Z \leq 0'53)$.

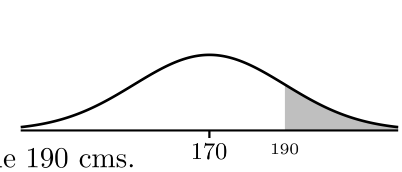
2) (Proceso inverso), en $N(0,1)$ hallar z_0 tal que $p(Z \leq z_0) = 0'8428$, resulta mirando en el cuerpo de la tabla $z_0 = 1'01$

Ejemplos

1. Se eligió una muestra de 1000 personas de una determinada población y resultó que su talla media era de 170 cm, con una desviación típica de 10 cm. Suponiendo que las tallas se distribuyen normalmente, calcúlese cuantas personas de esa muestra miden: a) Más de 190 cm; b) Entre 160 y 190 cm.

   La v.a. X que describe las tallas de la población es del tipo $N(170, 10)$.

   a)
   $p(X > 190) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{190-170}{10} = 2 \right\} =$
   $p(Z > 2) = 1 - 0'9772 = 0'0228$

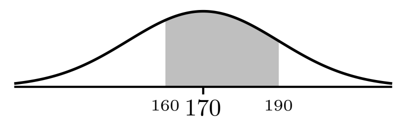
   Es de esperar que haya $0'0228.1000 = 22'8 \approx 23$ personas de más de 190 cms.

b)

$p(160 < X < 190) = \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{160-170}{10} = -1 \\ z_2 = \frac{190-170}{10} = 2 \end{array} \right\} = p(-1 < Z < 2) =$

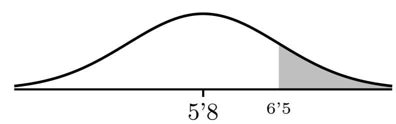
$\left\{ \begin{array}{l} p(z < 2) = 0'9772 \\ p(z < -1) = 1 - 0'8413 = 0'1587 \end{array} \right\} = 0'9772 - 0'1587 = 0'8185$

O sea 818 personas aproximadamente medirán entre 160 y 190 cm.



2. En una prueba de selectividad se ha obtenido de nota media 5'8 y la desviación típica es 1'75. Suponemos que las notas están distribuidas normalmente. Todos los alumnos que sobrepasen la nota 6'5 serán admitidos en la universidad. ¿Qué porcentaje de admitidos cabe esperar?

   $p(X \geq 6'5) = \left\{ \text{tipificando } z = \frac{6'5 - 5'8}{1'75} = 0'4 \right\} = p(Z \geq 0'4) =$
   $1 - p(Z \leq 0'4) = 1 - 0'6554 = 0'3446$
   Este valor es el tanto por uno, el tanto por ciento será 34'46 % de admitidos.

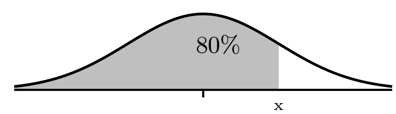


3. En una normal $N(23, 12)$, hallar el valor de la variable de manera que a su izquierda esté el 80% de la probabilidad.

   Al contrario que antes buscamos un x concreto tal que $p(X \leq x) = 0'8$

   En la $N(0, 1)$ tenemos que si $p(Z \leq z) = 0'8$, el valor más próximo de la tabla es $\left\{ \begin{array}{l} 0'7995 \text{ por defecto} \\ 0'8023 \text{ por exceso} \end{array} \right\}$ nos quedamos con $0'7995$ que corresponde con $z = 0'84$.

   sustituyendo en la tipificación: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $\quad x = \sigma z + \mu = 12z + 23 = 12.0'84 + 23 = 33'08$

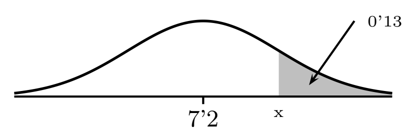


4. En una oposición la puntuación media del último examen fue 7'2 y la desviación típica 0'9. Hay plazas para un 13 % de los presentados. ¿Cuál es la puntuación mínima que un estudiante debe tener para conseguir plaza en la oposición?.

   Buscamos un x concreto tal que $p(X \geq x) = 0'13$

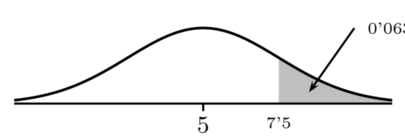
   Sabemos que $p(X \geq x) = 0'13$, en la $N(0, 1)$ para buscar en la tabla tenemos: $p(Z \geq z) = 0'13$, corresponde con $p(Z \leq z) = 0'87$ el valor más próximo de la tabla es $\left\{ \begin{array}{l} 0'8686 \text{ por defecto} \\ 0'8708 \text{ por exceso} \end{array} \right\}$ nos quedamos con $0'8708$ que corresponde con $z = 1'13$.

   sustituyendo en la tipificación: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $\quad x = \sigma z + \mu = 0'9z + 7'2 = 0'9.1'13 + 7'2 = 8'21$



5. Las puntuaciones de un examen calificado entre 0 y 10 puntos siguen una distribución normal de media $\mu = 5$. El 6'3 por ciento de los alumnos tiene una puntuación por encima de 7'5, ¿qué tanto por ciento de los alumnos es de esperar que tengan una puntuación por debajo de 4 puntos?

   Primero hemos de hallar σ :
   $p(X \geq 7'5) = 0'063$
   $p(Z \geq z) = 0'063 \longrightarrow p(Z \leq z) = 0'937$
   en las tablas: se obtiene $z = 1'53$
   el cambio $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$, $\quad 1'53 = \dfrac{7'5 - 5}{\sigma}$, $\quad$ despejando $\sigma = 1'63$
   Piden $p(X \leq 4) = p(Z \leq -0'61) = 1 - p(Z \leq 0'61) = 1 - 0'7291 = 0'2709$



luego aproximadamente el 27'1 % de los alumnos sacará menos de 4.

Problemas de variable aleatoria discreta. Distribución Binomial.

1. Se tiene un dado correcto, pero de tal manera que tres caras tienen el número 2, dos caras el número 1 y una cara el número 3. Se considera la variable aleatoria X que asigna a cada resultado del dado el número obtenido. Estudiar la distribución de la variable aleatoria X representando su función de probabilidad y su función de distribución.

   Solución:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$
F_i	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

2. En una caja donde hay dos bolas blancas y tres negras se efectúa el siguiente experimento: se sacan dos bolas consecutivas sin reponer. Una bola blanca vale un punto y una negra, dos puntos. A cada extracción se asigna la suma de los puntos obtenidos. a) Espacio muestral o dominio de X. b) Recorrido de X. c) Hallar la distribución de la variable aleatoria X. d) Representar su función de probabilidad. e) Representar su función de distribución. g) El mismo ejercicio reponiendo la bola cada vez.

   Solución: a) $E = \{bb, bn, nb, nn\}$ b) $R = \{2, 3, 4\}$,

   c)

x_i	2	3	4
p_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{20}$
F_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{14}{20}$	1

3. Hallar los parámetros en los dos problemas anteriores.

4. De cada 2.000 personas a los que se suministra cierto medicamento, 6 resultan alérgicas al mismo por término medio. Si en un determinado día se ha suministrado el medicamento a 400 personas, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos una alérgica?

   Solución: $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{400}{0} p^0 q^{400} = 1 - 0'997^{400}$

5. En una urna hay cinco bolas blancas y cuatro bolas negras. Consideremos la variable aleatoria "número de bolas blancas"en el experimento consistente en realizar seis extracciones con devolución. Determinar la probabilidad de obtener al menos cuatro bolas blancas.

   Solución: X_i = n^o de bolas blancas en 6 extracciones con devolución p(3 o menos blancas) = $p(x \leq 3) = F(3) = 0'7545$, p(al menos 4 blancas) = $1 - 0'7545$

6. La probabilidad de que un hombre al disparar pegue en el blanco es 1/3. Hallar y representar las funciones de probabilidad y distribución de la variable aleatoria "número de blancos en cinco disparos".

   Solución: $B(5, \frac{1}{3})$

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0'12	0'31	0'31	0'15	0'03	0'0039
F_i	0'12	0'43	0'74	0'89	0'92	1

7. Una determinada raza de perros tiene cuatro cachorros en cada camada. Suponiendo que la probabilidad de que un cachorro sea macho es de 0'55, se pide: a) Calcular la probabilidad de que en una camada dos exactamente sean hembras. b) Calcular la probabilidad de que en una camada al menos dos sean hembras.

   Solución: a) 0'36, b) 0'609

8. En una urna que contiene tres bolas blancas y una negra se realizan tres extracciones con reemplazamiento. Hallar: a) La probabilidad de que una bola sea blanca y las otras dos negras. b) La probabilidad de que una bola al menos sea blanca. c) La tabla de distribución binomial para este caso. d) La representación gráfica de las funciones de probabilidad y distribución.

   Solución: X= sacar blanca, B(3,3/4), a) $p(X = 1) = 9/64 = 0'1406$, b) $p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - 0'0156 = 0'9844$

X_i	0	1	2	3
P_i	0'015	0'1406	0'4218	0'4218
F_i	0'015	0'1562	0'578	1

9. En una prueba de selectividad se suspende al 15 % de los estudiantes. a) Hallar el número esperado (o media) de los alumnos suspendidos y la desviación típica si, entre los estudiantes presentados se eligen 2.000. b) Hallar la probabilidad de que suspendan de un grupo de 6 alumnos: I) como máximo 2; II) por lo menos la mitad.

   Solución: a) Bin(2000,0'15) prob susp 0'15, media np = 300, destip $\sqrt{npq} = \sqrt{255}$ b) B(6,0'15) I) $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{6}{x} 0'15^x . 0'85^{6-x} = 0'9526$, $p(X \geq 3) = 1 - p(X \leq 2) = 1 - 0'9526 = 0'04735$

Problemas de variable aleatoria continua. Distribución Normal.

1. Se define la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 1/2 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

   a) Comprobar que cumplen las condiciones de función densidad. b) Representar gráficamente. c) Calcular $p(1/2 \leq x \leq 2)$. d) Calcular las correspondiente función de distribución y representarla. e) Calcular la media y la varianza.

   Solución: c) $p(1/2 \geq x \geq 2) = 3/4$,

   d) $F(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 0 \\ x/2 & si & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & si & x > 2 \end{cases}$

   e) media = 1, var = 1/3

2. Se define la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 1/x & si \quad 1 \leq x \leq a \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$

   a) Hallar a para que cumpla las condiciones de función densidad. b) Representar gráficamente. c) Calcular la correspondiente función de distribución y representarla. d) Calcular la media y la varianza

   Solución:

   a) $a = e$, c) $F(x) = \begin{cases} 0 & six < 1 & \\ \ln x & si & 1 \leq x \leq e \\ 1 & si & x > e \end{cases}$

   d) $\mu = e - 1, \sigma^2 = 0'3$

3. Calcular las siguientes probabilidades en la normal $N(0, 1)$ a) $p(z \leq 2'78)$; b) $p(z \leq -0'94)$; c) $p(z \leq -1'7)$; d) $p(-1'24 \leq z \leq 2'16)$

   Solución: a) 0'9973, b) 0'1736, c) 0'0446, d) 0'8771

4. Calcular las siguientes probabilidades en la normal $N(3, 5)$ a) $p(x \leq 4'3)$; b) $p(x < -1)$; c) $p(2 \leq x \leq 10)$

   Solución: a) 0'6026, b) 0'2119, c) 0'9192-0'4207=0'4985

5. Se supone que la estancia de los enfermos en un hospital sigue una distribución normal de media 8 días y desviación típica 3. Calcular la probabilidad de que la estancia de un enfermo, a) sea inferior a 7 días; b) sea superior a 3 días; c) esté comprendida entre 10 y 12 días.

   Solución: a) 0'3708, b) 0'9515, c) 0'1628

6. Se llama cociente intelectual al cociente entre la edad mental y la edad real. Se sabe que la distribución de los cocientes intelectuales de 2.000 reclutas sigue una distribución normal de media 0'80 y desviación típica 0'50. a) Número de reclutas con cociente intelectual comprendido entre 0'7 y 1'2. b) Id. inferior a 0'3. c) Id. inferior a 0'9. d) Id. superior a 1'4.

   Solución: a) 0'3674.2000 $\approx$ 735, b) 0'1587.2000 $\approx$ 318, c) $\approx$ 1159, d) $\approx$ 230

7. Una máquina ha producido 1.000 varillas de en teoría 1 m de longitud, con una desviación típica de 0'8 mm. De ellas se necesitan 640. ¿Entre qué medidas habrá que tomar las varillas para quedarse con las más exactas?.

   Solución: N(1000,0'8)) $p(-a < z < a) = 0'64$, $p(z \leq a) = 0'82$, $a = 0'9153$, $x_a = 1000'73$ hay que tomarlas entre 999'27 y 1000'73

8. La media de las calificaciones obtenidas en las pruebas de acceso a la Universidad en cierta convocatoria fue $\mu = 4'7$ con una desviación típica $\sigma = 1'3$. Suponiendo que las

calificaciones siguen una distribución normal, calcular: i) El porcentaje de aprobados. ii) El porcentaje de alumnos que obtuvo entre 4 y 6 puntos. iii) El porcentaje de alumnos que obtuvo menos de 3 puntos iv) El porcentaje de alumnos que obtuvo más de ocho puntos.

Solución: N(4'4,1'3) i) $p(X \geq 5) = 40'9$ % ii) $p(4 \leq X \leq 6) = 54'32$ % iii) $p(X \leq 3) = 9'68$ % iv) $p(X \geq 8 = 0'57$ %

9. Las estaturas de 500 reclutas están distribuidas normalmente con una media de 169 cms y una desviación típica de 7 cms. Calcular el número de reclutas cuya altura, i) está entre 165 y 175 cms ii) es mayor de 180 cms.

   Solución: N(169,7) i) $p(X \leq 175) = 0'823$, $p(X \leq 165 = 0'2843$, $p(165 \leq x \leq 175) = 0'518$ ii) $p(X > 180) = 0'0582$

   $p(4 \leq X \leq 6) = 54'32$ % iii) $p(X \leq 3) = 9'68$ % iv) $p(X \geq 8 = 0'57$ %

10. Considérese la siguiente tabla de frecuencias agrupadas:

Intervalo	3'5-6'5	6'5-9'5	9'5-12'5	12'5-15'5
Frecuencia	3	5	9	6

   a) Dibujar el correspondiente histograma y calcular la media y la desviación típica. b) Calcular la probabilidad de que una variable Normal de media y desviación típica iguales a las obtenidas en el apartado a) sea mayor que 12'5.

   Solución: $\bar{x} = 10'35$, $\sigma = 2'93$, $p(X > 12'5) = 23'27\%$

11. Un profesor realiza un test de cien items a un curso con doscientos cincuenta alumnos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los alumnos siguen una distribución normal de media 64 puntos y desviación típica 10 puntos y denotando con $p(X \leq n)$ la probabilidad de obtener n puntos como máximo y con $p(X \geq n)$ la probabilidad de obtener al menos n puntos. Calcular: i) $p(X \geq 60)$, $p(X \leq 75)$, $p(30 \leq X \leq 60)$ ii) Número de alumnos que se espera que tengan al menos 45 puntos.

   Solución: i) $p(X \geq 60) = 65'5\%$, $p(X \leq 75) = 86'43\%$, $p(30 \leq X \leq 60) = 34'43\%$ $ii)0'9713.250 \approx 243$ alumnos

12. La cantidad de sustancia S, contenida en una dosis de cierta vacuna, se distribuye según un modelo normal de probabilidad con media 50 unidades. Se ha comprobado que la vacuna surte efecto (inmuniza) si la dosis administrada contiene una cantidad de S comprendida entre 46 y 54 unidades. Sabiendo que el 2'5% de las dosis contiene una cantidad de S superior a 54 unidades:

   a) ¿Qué probabilidad hay de que un individuo al que se le administra una dosis elegida al azar no se inmunice?.

   b) Aproximadamente ¿cuánto vale la desviación típica?

   Solución: $N(50, \sigma)$, sabemos $p(S \leq 54) = 0'975, p(z \leq \frac{54-50}{\sigma} = 0'975, z = 1'96, \sigma = 2'04$

   a) $p(46 < S < 54) = 0'95$, la probabilidad de que no se inmunice es del 0'05 % b) ya hallada.

13. En una carrera la media del tiempo empleado ha sido de 73 minutos y la desviación típica 7 minutos. Se elimina al 5% de los corredores. A partir de qué tiempo queda eliminado un corredor.

14. De una urna con 20 bolas negras y 10 blancas se hacen cincuenta extracciones con devolución. Hallar la probabilidad de que a)salgan más de 17 blancas; b) salgan 28 blancas

8 DISTRIBUCIÓN MUESTRAL. ESTIMACIÓN ESTADÍSTICA

8.1 Muestreo

Colectivo o población es el conjunto de elementos con alguna característica común.

Muestra es un subconjunto o parte representativa de un colectivo.

Muestreo es la operación de seleccionar los elementos de la población que van a constituir la muestra.

Puede ser **aleatorio** si se eligen al azar, **estratificado** si se divide la población en clases y en cada una se elige un número de elementos en la proporción conveniente para que la muestra reproduzca de forma adecuada los caracteres de la población.

Ejemplos

- Tres amigos hacen una quiniela poniendo respectivamente 3, 6 y 9 euros, les tocan 60.300 euros. Repartirlos proporcionalmente.

$$\left.\begin{array}{c}3\\6\\9\end{array}\right\} \quad 18; \quad \frac{60300}{18} = 3350 \quad \text{por cada euro, luego reciben} \quad \left\{\begin{array}{l}3350 \times 3 = 10050\\3350 \times 6 = 20100\\3350 \times 9 = 30150\end{array}\right.$$

- En un país, el porcentaje de declaraciones fiscales que son incorrectas es del 40 %, 60 % y 20 %, según se trate de industriales, profesionales liberales o asalariados. Se sabe que del total de declaraciones, el 10 % son de industriales, el 20 % de profesionales liberales y el resto de asalariados. Se van a realizar 1500 inspecciones:

  a) ¿Cuántos industriales, profesionales liberales y asalariados han de ser inspeccionados si se desea que la inspección sea proporcional a la probabilidad de declaración incorrecta en cada categoría profesional?

  b) Compara esta distribución de las 1500 inspecciones con la que se tendría en el caso de hacerla proporcional al número de declaraciones de cada categoría.

  Sea I: industrial, L: liberal, A: asalariado, M: declaración incorrecta:

  a)

declaración incorrecta	40%	60%	20%
	I	L	A
total declaraciones	10%	20%	70%
inspecciones	1500		

$$\begin{array}{r}p(I \cap M) = 0'1.0'4 = 0'04\\p(L \cap M) = 0'2.0'6 = 0'12\\p(A \cap M) = 0'7.0'2 = 0'14\\\hline \text{Total: } 0'30\end{array} \qquad \frac{1500}{0'30} = 5000 \quad \left\{\begin{array}{l}5000.0'04 = 200\\5000.0'12 = 600\\5000.0'14 = 700\end{array}\right.$$

  b)

$$I = 0'1 \qquad \frac{1500}{1} = 1500 \quad \begin{cases} 1500.0'1 = 150 \\ 1500.0'2 = 300 \\ 1500.0'7 = 1050 \end{cases}$$
$$L = 0'2$$
$$A = 0'7$$

La **teoría de muestreo** es el estudio de las relaciones existentes entre una población y muestras extraídas de ella. Los parámetros (media, etc) de la población se suelen llamar frecuentemente parámetros, los parámetros de una muestra se suelen llamar estadísticos muestrales o simplemente estadísticos.

8.2 Distribución muestral de medias

Si consideramos todas las posibles muestras de tamaño n de una población de media μ y desviación típica σ y la media de cada muestra $\bar{x}$ obtenemos una variable aleatoria $\bar{X}$ que asigna a cada muestra su media, se llama **distribución muestral de medias** y tendrá una media y una desviación típica. .

Ejemplo Una población se compone de los cinco números 2,3,6,8,11. Considerar todas las muestras posibles de tamaño dos que pueden extraerse con reemplazamiento de esta población. Hallar: a) la media y la desviación típica de la población, b) las muestras de tamaño dos y sus medias, c) la media de la distribución muestral de medias y la desviación típica de la distribución muestral de medias.

a) $\mu = 6 \quad \sigma = 3'29$

b) Hay $5^2 = 25$ muestras de tamaño 2

$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,6)$	$(2,8)$	$(2,11)$
$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,6)$	$(3,8)$	$(3,11)$
$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,6)$	$(6,8)$	$(6,11)$
$(8,2)$	$(8,3)$	$(8,6)$	$(8,8)$	$(8,11)$
$(11,2)$	$(11,3)$	$(11,6)$	$(11,8)$	$(11,11)$

Las correspondientes medias muestrales son:

2	$2'5$	4	5	$6'5$
$2'5$	3	$4'5$	$5'5$	7
4	$4'5$	6	7	$8'5$
5	$5'5$	7	8	$9'5$
$6'5$	7	$8'5$	$9'5$	11

c) Introducidos estos números en la calculadora resulta:
La media de la distribución muestral de medias es 6.

c) La desviación típica de la distribución muestral de medias es $2'32$.

En general se tiene:

Para **población normal o muestra grande** ($n \geq 30$), si μ, σ son los parámetros de la población entonces:
la **distribución muestral de medias** $\bar{X}$ es normal $\boxed{N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$

Ejemplo El peso de las naranjas de un campo se distribuye normalmente con media 180 gr y desviación típica 25 gr. Hallar:

a) La probabilidad de que al coger una naranja pese menos de 190 gr.

b) La probabilidad de que en una muestra de 16 naranjas la media de la muestra sea menor que 190 gr.

c) Si cogemos 100 naranjas ¿cuántas de ellas pesarán menos de 190 gr?

d) Si cogemos 100 muestras de 16 naranjas ¿en cuántas de ellas confiamos que la media sea menor que 190?

e) Entre que valores alrededor de la media 180 gr estará la media de una muestra de 16 naranjas con probabilidad 0'95.

a) Es problema elemental de normal $N(180, 25)$

$p(X < 190) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{190-180}{25} = 0'4 \right\} = p(Z < 0'4) = 0'6554,$

b) Es problema de muestreo. Como la distribución de partida es normal, aunque la muestra es de tamaño menor que 30, la distribución muestral de medias $\bar{X}$ es normal $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(180, \dfrac{25}{\sqrt{16}}\right) = N(180, 6'25)$

Entonces: $p(\bar{X} < 190) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{190-180}{6'25} = 1'6 \right\} = p(Z < 1'6) = 0'9452$

c) Se relaciona con a):

número de naranjas con menos de 190 gr $= 100.p(X < 190) = 100.0'6554 \approx 65$ naranjas.

d) Se relaciona con b):

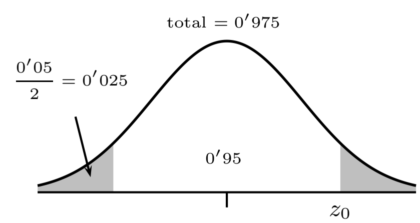
número de muestras con media menor de 190 gr : $p(\bar{X} < 190).100 = 0'9452.100 = 94'52$, entre 94 y 95 de las cien de las muestras.

e) El cambio de variable para tipificar es $z = \dfrac{x-\mu}{\text{des. tip.}}$

En nuestro caso: $z = \dfrac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, despejando x queda

$x - \mu = z.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad x = \mu + z.\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Mirando las tablas: z_0 verificando $p(Z \leq z_0) = 0'95 + 0'05/2 = 0'975$, es $z_0 = 1'96$, destipificando $180 \pm 1'96\dfrac{25}{\sqrt{16}} = 180 \pm 12'25$



8.3 Estimación estadística

En los apartados anteriores se vio como la teoría de muestreo podía emplearse para obtener información acerca de muestras extraídas al azar de una población conocida.

La estimación hace un proceso inverso, aproxima un parámetro de una población a partir de una muestra.

Si, por ejemplo, se estima la media de la población por la media de la muestra se ha hecho estimación puntual. Si lo que se da es un intervalo en el que cabe con cierta probabilidad que esté la media se ha hecho estimación por intervalo de confianza.

Por lo visto antes cabe afirmar, conocidos los parámetros poblacionales, que, por ejemplo, con un 95% de confianza la media de una muestra está en un intervalo de la media poblacional. Recíprocamente conocida una muestra puedo afirmar, con un 95% de confianza, que la media poblacional estará en un intervalo equivalente de la media de la muestra.

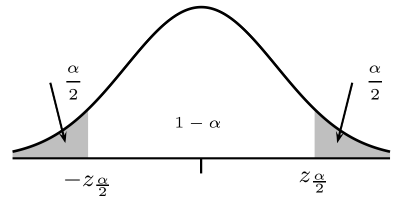
8.4 Estimas por intervalos de confianza

Supongamos que queremos estimar el valor de un parámetro poblacional por intervalo de confianza, se trata de encontrar un intervalo en el que esté el parámetro de la población con una probabilidad determinada $1-\alpha$ que se llama **nivel de confianza**.

Al resto de probabilidad α se le llama **nivel de significación**.

Las distribuciones muestrales que usaremos serán normales. Al valor de la variable normal tipificada que nos da los extremos del intervalo de confianza $z_{\frac{\alpha}{2}}$ se le llama **valor crítico**.

nivel confianza $1-\alpha$	valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$
0'90	1'65
0'95	1'96
0'99	2'58



Intervalo de confianza para la media μ Los datos son: $\bar{x}, \sigma, n$.

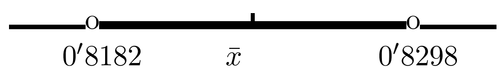
Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ con el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}}$ correspondiente al nivel de confianza $1-\alpha$

Si en vez de σ lo que conocemos es s la desviación típica de la muestra, en la expresión anterior se sustituye (estima) σ por s

Ejemplo Las medidas de los diámetros de una muestra al azar de 200 cojinetes de bolas hechos por una determinada máquina durante una semana dieron una media de 0'824 cm y una desviación típica de 0'042 cm. Hallar el intervalo de confianza del 95% para el diámetro medio de todos los cojinetes.

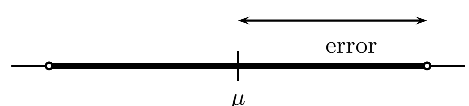
Los extremos del intervalo de confianza al(95%)para la media μ son: $\bar{x} \pm 1'96 \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 0'824 \pm 1'96 \dfrac{0'042}{\sqrt{200}} = 0'824 \pm 0'0058 = \begin{cases} = 0'8182\text{cm} \\ = 0'8298\text{cm} \end{cases}$ esto expresa que $p(0'8182 \leq \mu \leq 0'8298) = 0'95$

con probabilidad 95% μ está en:



Error de la estima y tamaño muestral Error de estima o máximo o margen de error para un cierto nivel de confianza se define, como la semiamplitud del intervalo:

para las medias: **error** $= z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$



Ejemplo Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo estima que la desviación típica del mismo es de 0'05 segundos. ¿Cuál será el número de medidas que deberá hacer para que sea del 99% la confianza de que el error de su estima no excederá de 0'01 segundos?

El error de la estima viene dado para el nivel de confianza del 99% por $2'58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, si se quiere sea menor de 0'01 entonces $2'58 \dfrac{0'05}{\sqrt{n}} \leq 0'01, \quad n \geq 166'4$.

Así, pues, se tiene la confianza del 99% de que el error de la estima será menor de 0'01 solamente si n es 167 o mayor.

8.5 Decisiones estadísticas. Hipótesis estadísticas

En la práctica es frecuente tener que tomar decisiones sobre una población a partir de la información suministrada por una muestra. Tales decisiones se llaman decisiones estadísticas.

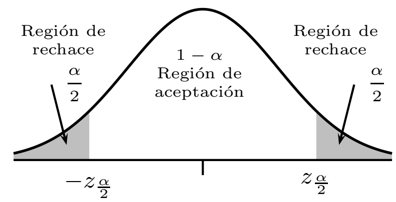
Por ejemplo, se puede querer decidir a partir de los datos del muestreo, si un suero es realmente efectivo para la cura de una enfermedad, si un sistema educacional es mejor que otro, si una moneda determinada está o no cargada, etc.

Para ello se empieza formulando la hipótesis más razonable a la que se llama **hipótesis nula** y se denota H_0

Por ejemplo, si se quiere decidir si una moneda está cargada, se formula la hipótesis de que está bien, es decir: H_0 probabilidad de cara $p = 0'5$.

Una hipótesis que sea distinta de la H_0 se llama hipótesis alternativa y se denota por H_1. (En la práctica la nula es la que incluye el igual).

Lo que se va a hacer es ver con una muestra si la hipótesis nula se acepta o se rechaza. Esto se llama test de hipótesis. Se acepta si la media de de la muestra cae dentro de la zona de aceptación prefijada de antemano en la distribución muestral, llamada **región de aceptación**, y se rechaza si cae fuera o sea en la región crítica.



Si se rechaza una hipótesis que debería ser aceptada se comete un error de Tipo I. La probabilidad máxima con la que en el test se puede cometer un error de tipo I se llama **nivel de significación** del test, se denota α.

A la situación contraria: aceptar una hipótesis que debería ser rechazada se le llama un error de Tipo II.

ERROR	
Tipo I	Rechazar H_0 siendo verdadera
Tipo II	Aceptar H_0 siendo falsa

Ejemplos

1. Se sabe que la longitud de las varillas producidas por una máquina sigue una distribución normal con desviación típica 0'2 cm. Si una muestra de 16 piezas dio una longitud media de 80'03 cm. ¿Se puede aceptar que la media de todas las varillas es 80 cm, con un nivel de significación del 10%?.

   Planteamiento:

   Contrastamos $H_0 : \mu = 80$ cm frente a $H_1 : \mu \neq 80$ cm, es test bilateral.

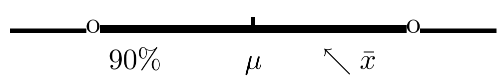
   $\sigma = 0'2$

   $n = 16$

   media muestral $\bar{X} = 80'03$

   nivel significación $\alpha = 10\%$ corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'65$.

   Resolución: El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'65 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 80 \pm 1'65 \dfrac{0'2}{\sqrt{16}} = 80 \pm 0'0825$ que da el intervalo $79'9175, 80'0825$. Como $\bar{x} = 80'03$ queda dentro del intervalo se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 80$cm

   Niveles de significación y valores críticos: Dependen del tipo de test:

nivel de significación α	valor crítico (bilateral) $z_{\frac{\alpha}{2}}$	valor crítico (unilateral) z_α
10%	1’65	1’28
5%	1’96	1’65
1%	2’58	2’33

2. La duración media de una muestra de 100 tubos fluorescentes producidos por una compañía resulta ser 1.570 horas, con una desviación típica de 120 horas. Si μ es la duración media de todos los tubos producidos por la compañía, comprobar la hipótesis $\mu = 1600$ horas contra la hipótesis alternativa $\mu \neq 1600$ con un nivel de significación de 0’05.

   Planteamiento:

   Contrastamos $H_0 : \mu = 1600$ cm frente a $H_1 : \mu \neq 1600$ cm, es test bilateral.

   Desv. tip. de la muestra = 120, estimamos $\sigma = 120$

   $n = 100$

   media muestral $\bar{X} = 1570$ horas

   nivel significación $\alpha = 0'05$ corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

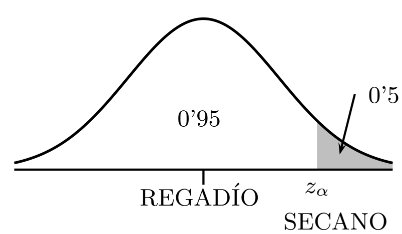
   Resolución: El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1600 \pm 1'96 \dfrac{120}{\sqrt{100}} = 1600 \pm 23'52$ que da el intervalo $(1576'48, 1623'52)$.

   Como $\bar{x} = 1570$ queda fuera del intervalo se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 1600$cm

3. Se quiere contrastar el contenido de azúcar de distintos cargamentos de remolacha. Se sabe que el contenido medio de azúcar en remolacha de regadío es 18 % y en cambio la media para la de secano es superior, en ambos casos la desviación típica es del 6 %. Se coge una muestra de 20 cargamentos. ¿Qué valor de la media permitirá tomar la decisión de si es de secano o de regadío al nivel de significación del 5 %?

   Planteamiento:

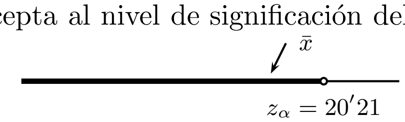
   Contrastamos $H_0 : \mu \leq 18\%$ frente a $H_1 : \mu > 18\%$, es test unilateral.
   Desv. tip. $\sigma = 6\%$
   $n = 20$
   nivel significación $\alpha = 0'05$ corresponde con $z_\alpha = 1'65$.



   Resolución: El extremo de la región de aceptación es $\mu + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu + 1'65 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 18 + 1'65 \dfrac{6}{\sqrt{20}} = 18 + 2'21 = 20'21$.

   Luego la regla para decidir es:

   si la media de la muestra es menor o igual que 20’21, se acepta al nivel de significación del 5 % que el cargamento es de remolacha de regadío.



Problemas de Distribución muestral y Estimación estadística

1. Tres amigos invierten respectivamente 7, 3 y 5 euros en una quiniela. Aciertan y ganan 2000 euros. Repartir el premio proporcionalmente.

   Solución: $\frac{2000}{7+3+5} = 133'3; 933'1, 399'9, 666'5$

2. En un barrio se quiere hacer un estudio para conocer mejor el tipo de actividades de ocio que gustan más a sus habitantes. Para ello, van a ser encuestados 100 individuos elegidos al azar.

   a) Explica qué procedimiento de selección sería más adecuado utilizar: muestreo con o sin reposición. ¿Por qué?

   b) Como los gustos cambian con la edad y se sabe que en el barrio viven 2500 niños, 7000 adultos y 500 ancianos, más tarde se decide elegir la muestra anterior utilizando muestreo estratificado. Define los estratos y determina el tamaño muestral correspondiente a cada estrato.

   Solución: a) Sin reemplazamiento

   b) $\dfrac{A}{2500} = \dfrac{B}{7000} = \dfrac{C}{500} = \dfrac{100}{10000} \quad A = 25, B = 70, C = 5$

3. Se sabe que el cociente intelectual de los alumnos de una universidad se distribuye según una normal de media 100 y varianza 729.

   a) Hallar la probabilidad de que una muestra de 81 alumnos tenga un cociente intelectual medio inferior a 109.

   b) Hallar la probabilidad de que una muestra de 36 alumnos tenga un cociente intelectual medio superior a 109.

   Solución: es de muestreo,a) 99'87 %, b) 2'28 %

4. Se sabe que la desviación típica del peso de los individuos de una población es 6 kg. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de considerar para, con un nivel de confianza del 95 %, estimar el peso medio de los individuos de la población con un error inferior a 1 kg.

   Solución: error $n \geq 138'29$

5. Una máquina produce clavos de longitud media 80 mm con una desviación típica de 3 mm.

   a) ¿Cual es la probabilidad de que la longitud media de una muestra de 100 clavos sea superior a 81 mm?

   b) Si se toman 50 cajas de 100 clavos, ¿en cuántas cabe esperar que la longitud media esté comprendida entre 79 mm y 81 mm.

   Solución: es de distribución muestral, a) $p(\bar{X} > 81) = 0'0004$, b) $p(79 < \bar{X} < 81) = 0'9992$, habrá $0'9992.50 = 49'96 \approx 50$

6. Un fabricante de bombillas sabe que la desviación típica de la duración de las bombillas es 100 horas. Calcula el tamaño de la muestra que se debe someter a prueba para tener una confianza del 95% de que el error de la duración media que se calcula sea menor que 10 horas.

   Solución: error $n \geq 384'16$

7. Las estaturas de una muestra aleatoria de 50 estudiantes tienen una media de 174'5 cm; se conoce que la desviación típica de la variable estatura es 6'9 cm. Calcúlese un intervalo de confianza del 95% para la estatura media de todos los estudiantes.

   Solución:

   IC(95%):$\mu \in \bar{x} \pm 1'96\dfrac{s}{\sqrt{N}} = 174'5 \pm 1'96\dfrac{6'9}{\sqrt{50}} = 174'5 \pm 1'91$ cm

8. Una muestra aleatoria de 100 alumnos que se presentan a las pruebas de selectividad revela que la media de edad es 18'1 años. Halla un intervalo de confianza del 90% para la edad media de todos los estudiantes que se presentan a las pruebas, sabiendo que la desviación típica de la población es 0'4.

   Solución:

   Busquemos en $N(0,1)$ el valor de z_c correspondiente al 90%: $p(z \leq z_c) = 0'95 = 1'65$,

   IC(90%):$\mu \in \bar{x} \pm 1'65\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = 18'1 \pm 1'65\dfrac{0'4}{\sqrt{100}} = 18'1 \pm 0'066$

9. Se tiene una población $N(\mu, 2)$ y una muestra formada por 16 datos de media 2'5.

   a) Obtener el intervalos de confianza al 90% para la media μ de la población.

   b) ¿Qué tamaño ha de tomar la muestra que permita estimar con un nivel de confianza del 95% la media con un error de 0'2?

   Solución:

   a) Busquemos en $N(0,1)$ el valor de z_c correspondiente al 90%: $p(z \leq z_c) = 0'95 = 1'65$,

   IC(90%):$\mu \in \bar{x} \pm 1'65 \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = 2'5 \pm 1'65 \dfrac{2}{\sqrt{16}} = 2'5 \pm 0'825$

   b) para el nivel de confianza del 95%: el error es: $1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$, entonces $1'96 \dfrac{2}{\sqrt{N}} \leq 0'2, \quad N \geq 384'16$

10. El diámetro de unos ejes sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 2 mm. Se toma una muestra de tamaño 25 y se obtiene un diámetro medio de 36 mm. ¿Se puede afirmar con un nivel de significación de 0'01 que la media de la población es de 40 mm?

    Solución:

    $H_0 : \mu = 40$, valor crítico 2'58, se rechaza pues 36 queda fuera de $(38'968, 41'032)$

11. Un equipo de psicólogos ha comprobado que en cierta población infantil el tiempo (en minutos) empleado en realizar determinada actividad manual sigue un modelo normal de probabilidad. Un grupo de 36 niños, seleccionados aleatoriamente en dicha población, realizaron esa actividad manual en un tiempo medio de 6'5 minutos con una desviación típica muestral de 1'5 minutos. A partir de esta información:

    Para un nivel de significación del 1% ¿podríamos rechazar la hipótesis de que el tiempo medio en la población es de 7 minutos? Justifica las respuestas.

    Solución:

    $H_0 : \mu = 7$, valor crítico 2'58

    $N(7, \frac{1'5}{6} = 0'25)$ tipificando $\frac{6'5-7}{0'25} = --2$ queda dentro de $(-2'58, 2'58)$, se acepta la hipótesis de que la media de la población sea 7 minutos.

12. La capacidad de absorción de agua de las esponjas producidas por un fabricante tiene una media de 1800 ml y una desviación típica de 100 ml. mediante una nueva técnica en el proceso de fabricación se aspira a que esa capacidad pueda ser incrementada. Para contrastar esa posibilidad, se ensaya una muestra de 50 esponjas y se encuentra que su capacidad media de absorción es de 1850 ml. ¿Es admisible plantearse que, en efecto, hay un aumento de absorción al nivel de significación del 0'01?

    Solución: $H_0 : \mu = 1800, H_1 : \mu > 1800$, ensayo unilateral por la derecha, $z_\alpha = 2'33$ $N(1800, \frac{100}{\sqrt{50}} = 14'14)$ tipificando $\frac{6'5-7}{14'14} = 3'53$ queda fuera de $(-\infty, 2'33)$, Se rechaza H_0, la aspiración de mejora debe ser admitida

13. Una empresa comercializa bebidas refrescantes en un envase en cuya etiqueta se puede leer "contenido 250 cm^3. El Departamento de Consumo toma aleatoriamente 36 envases y estudia el contenido, obteniendo una media de 234 cm^3 y una desviación típica muestral de 18 cm^3. ¿Puede afirmarse con un 5% de significación que se está estafando al público? (Consideramos estafa que el contenido sea menor que el expresado en la etiqueta.)

    Solución:

    $H_0 : \mu \geq 250, H_1 : \mu < 250$ ensayo unilateral por la izquierda

    $z_\alpha = 1'65$ $N(250, \frac{18}{\sqrt{36}} = 3)$ tipificando $\frac{234-250}{3} = -5'3$ queda fuera de $(-1'65, \infty)$, Se rechaza H_0, los envases contienen menos de lo que dicen.

14. Se ha tomado una muestra de los precios de un mismo producto alimenticio en 16 comercios elegidos al azar en un barrio de una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios:

    95, 108, 97, 112, 99, 106, 105, 100, 99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110

    Suponiendo que los precios de este producto se distribuyen según una ley normal de varianza 25 y media desconocida:

    a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral?

b) Determine el intervalo de confianza, al 95 %, para la media poblacional.

Solución: a) N(104; 1'25) b) (101'55; 106'45)

15. Se supone que la estatura de los chicos de 18 años de cierta población sigue una distribución normal de media 162 cm y desviación típica 12cm. Se toma una muestra al azar de 100 de estos chicos encuestados y se calcula la media.

    ¿Cuál es la probabilidad de que esta media esté entre 159 y 165 cm?

    Solución: 0'9876

16. Un fabricante de electrodomésticos sabe que la vida media de éstos sigue una distribución normal con media m = 100 meses y desviación típica s = 12 meses.

    Determínese el mínimo tamaño muestral que garantiza, con una probabilidad de 0'98, que la vida media de los electrodomésticos en dicha muestra se encuentra entre 90 y 110 meses.

    Solución: al menos 8 electrodomésticos